

THÈSE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITE DE BESANÇON

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE

par

Jacques CHAUVIN

Maitre ès sciences

Régimes transitoires dans
les résonateurs à quartz
soumis à des variations
rapides de température

Soutenue le 3 octobre 1975 devant la Commission d'Examen

MM P. MESNAGE

Président

M. OLIVIER

F. LHOTE

Examineurs

R. BESSON

J.J. GAGNEPAIN



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546611_0019

THÈSE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITE DE BESANÇON

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE

par

Jacques CHAUVIN

Maitre ès sciences

Régimes transitoires dans
les résonateurs à quartz
soumis à des variations
rapides de température

Soutenue le 3 octobre 1975 devant la Commission d'Examen

MM P. MESNAGE

Président

M. OLIVIER

F. LHOTE

R. BESSON

J.J. GAGNEPAIN

Examineurs

325HT



UNIVERSITE DE BESANCON

Président : Monsieur THIEBAUT Jean

FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

Mr BERNARD Jean : Chimie-Physique
Professeur :

ASSESSEUR

Mr PARIZET Jean : Mathématiques
Professeur :

PROFESSEURS

Mrs CHATELET François : Mathématiques
MESNAGE Pierre : Chronométrie
PERROT Roger : Chimie Générale
PLUVINAGE Philippe : Physique Théorique
QUANTIN André : Pédologie
CHALEAT Raymond : Mécanique Appliquée
RIPPLINGER Jean : Physiologie animale
GREMILLARD Jean : Mathématiques
VIENOT Jean-Charles : Physique Gle-Optique
THIEBAUT Jean : Pétrographie-Minéralogie
GOMOT Lucien : Zoologie et Embryologie
BENNETON Gaston : Mathématiques
GALATRY Louis : Physique Moléculaire
THEOBALD Jean-Gérard : Spectroscopie Hertz.
CERUTTI Ernest : Chimie Appliquée
DEVIN Claude : Chimie 1er cycle
CAPODANNO Pierre : Mécanique Théorique
BANTEGNIE Robert : Mathématiques
ROBERT Daniel : Physique Moléculaire
ROBERT Jacques : Mathématiques I
CHAUVE Pierre : Géologie-Minéralogie
RANGHEARD Yves : Géologie

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mrs POTIER Robert : Physique des Solides
REAL Pierre : Ecologie animale
GOUARNE René : Mathématiques
MERIGOUX Henri : Cristallographie et
Synthèses minérales
OLIVIER Marcel : Electronique Quantique
MONTAGNER Hubert : Psychophysiologie
BULABOIS Jean : Physique Gle-Optique
GAUDEMER Yves : Biochimie
LAUDE Bernard : Chimie Organique
MIELLOU Jean-Claude : Analyse Numérique
ROBERT Guy : Electrochimie

DOYENS HONORAIRES

Mrs GLANGEAUD, JACQUEMAIN,
CHATELET, THIEBAUT

PROFESSEURS HONORAIRES

Mrs BAILLAUD, DUFFIEUX, THIRY,
TRILLAT, UEBERSFELD,
VINCENSINI, DREYFUSS
TRONCHET, THEOBALD N.

MAITRE DE CONFERENCES HONORAIRE

Mr GRANIER

MAITRES DE CONFERENCES

Mrs BIDAULT Michel : Taxo.Exp.
DUBOUCHET Jacques : Botanique
MARLE Charles : Mathém.
WEIL Michel : Mathém.
HAYLI Avram : Astrono.
BROQUET Paul : Géologie
GRAS Georges : Mathém.
TREHEL Michel : Informa.

CHARGE D'ENSEIGNEMENT

Mr MILLET Bernard

RESPONSABLE DES SERVICES ADMI-
NISTRATIFS

Mr RUNGE Jean-Marie

PROFESSEUR SANS CHAIRE DE
L'E.N.S.C.M.B.

Mr LHOTE François

MAITRE DE CONFERENCES

Mr BESSON Raymond

A mes Parents

A V A N T - P R O P O S

Cette étude a été réalisée dans le Laboratoire de Chronométrie de l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et de Micromécanique de Besançon.

Je remercie Monsieur MESNAGE, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université de Besançon, Directeur de l'ENSCMB qui m'a proposé le sujet et m'a donné la possibilité de le mener à bien en m'accueillant dans son laboratoire.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude à :

- Monsieur OLIVIER, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université de Besançon ;*
- Monsieur LHOTE, Professeur, Directeur du Laboratoire d'Automatique de l'ENSCMB ;*
- Monsieur BESSON, Maître de Conférences à l'ENSCMB ;*
- Monsieur GAGNEPAIN, Maître-assistant à l'ENSCMB, qui m'a constamment suivi dans mes travaux, et dont les nombreux conseils m'ont été de la plus grande utilité.*

Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma plus profonde et plus respectueuse reconnaissance.

J'ai toujours pu compter sur l'aide efficace des chercheurs du Laboratoire : Messieurs PERDIGUES, PEGEOT, MOSSUZ, PONCOT, DUFFAY, et particulièrement Roger BOURQUIN.

Je leur en suis très reconnaissant.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Messieurs CARON et THIEBAUD pour la partie résonateurs, BERTHAUD et PELOT pour l'électronique, CASSARD pour la mécanique.

Je remercie également Messieurs GENESTIER, PERNIN (L.M.A), HUGOT (L.O.B) qui, à des titres divers, m'ont apportés de précieux conseils.

Je ne saurais oublier tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de ce mémoire : Messieurs DEMOULIN, RENAUDOT, et tout particulièrement Mademoiselle COTE qui a accepté avec gentillesse et compétence de le dactylographier.

S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
<u>P R E M I E R E P A R T I E</u>	
<u>I - I N T R O D U C T I O N</u>	1
<u>A - POSITION ET IMPORTANCE DU PROBLEME</u>	1
<u>B - RAPPELS SUR LES QUARTZ DE COUPE AT VIBRANT EN</u> <u>CISAILLEMENT D'EPAISSEUR ; CARACTERISTIQUES</u> <u>FREQUENCE-TEMPERATURE</u>	3
a) <u>Définition des coefficients</u>	3
b) <u>Calcul des coefficients de température - Influence</u> <u>de l'angle de coupe</u>	5
<u>II - E T U D E E X P E R I M E N T A L E</u>	10
<u>A - MATERIEL UTILISE</u>	10
1) <u>Dispositif de contrôle de température</u>	11
a) <u>L'enceinte thermostatée</u>	11
b) <u>La régulation électronique</u>	11

c) <u>Le chauffage rapide</u>	12
d) <u>Thermomètre électronique</u>	12
2) <u>Dispositif de contrôle de fréquence</u>	13
a) <u>L'oscillateur</u>	13
b) <u>Un étalon de fréquence variable</u>	14
c) <u>Convertisseur fréquence-tension</u>	14
3) <u>Dispositif d'enregistrement</u>	14

D E U X I E M E P A R T I E

B - MISE EN EVIDENCE DES REGIMES TRANSITOIRES

15

1) <u>Description</u>	15
2) <u>Interprétation physique</u>	17

C - ETUDE QUALITATIVE

17

1) <u>Vitesse de chauffage constante - Influence de</u> <u>l'échelon</u>	19
2) <u>Vitesse de chauffage variable</u>	21
a) <u>Variation de Δf_{∞}</u>	21
b) <u>Durée du régime transitoire</u>	22

	<u>Pages</u>
3) <u>Conclusion</u>	23
<u>D - INFLUENCE DES PARAMETRES EXTERIEURS</u>	24
1) <u>Epaisseur du cristal</u>	25
2) <u>Influence de la forme des électrodes</u>	28
a) <u>Temps de stabilisation</u>	28
b) <u>Amplitude et temps de réponse</u>	28
c) <u>Interprétation</u>	29
3) <u>Influence de la nature et de la pression du gaz</u>	30
a) <u>Hélium à différentes pressions</u>	31
b) <u>Autres gaz</u>	32
<u>E - RECHERCHE D'UNE FORME NOUVELLE D'ELECTRODES</u>	34
1) <u>Rôle et réalisation des électrodes</u>	34
a) <u>Définition</u>	34
b) <u>Choix et réalisation</u>	36
c) <u>Résultats expérimentaux</u>	37
2) <u>Résonateur fondamental à électrodes rectilignes</u>	38
a) <u>Durée de stabilisation T_s</u>	38

	<u>Pages</u>
b) Mesure de $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$ et du temps de réponse τ	38
c) Influence de la vitesse de chauffage	39
 F - LE RESONATEUR A QUARTZ SOUMIS A UNE IMPULSION THERMIQUE	 39

1) Evolution simultanée des fréquences et températures pour le résonateur fondamental à électrodes rectilignes	41
a) Vitesse de chauffage constante, amplitude d'impulsions différentes	42
b) Vitesse de chauffage variable, temps de chauffe constant	42
2) Comparaison avec le résonateur AT, partiel 5, électrodes à bouton central	43

TROISIEME PARTIE

<u>III - ETUDE THEORIQUE</u>	44
------------------------------------	----

A - CALCUL DE LA DIFFUSION DE CHALEUR A TRAVERS UNE PLAQUE DE QUARTZ	44
1) Calcul de la solution	44
2) Détermination des constantes ω , A et B	47

B - APPLICATION AU CALCUL DU REGIME TRANSITOIRE 51

1) Etablissement de la nouvelle équation différentielle	52
2) Résolution sans 2ème membre	54
3) Résolution avec second membre	55
4) Solution générale	60
5) Calcul de $w(t)$	61
6) Remarques	65

C - RESONATEUR MUNI D'ELECTRODES ET MONTE SUR DES PATTES

DE FIXATION	66
1) Influence des électrodes	66
a) Dilatation des électrodes	67
b) Existence de contraintes internes	67
2) Influence des fixations	68
a) Pattes de fixation considérées seules	69
b) Cristal fixé	70
3) Influence sur la fréquence du résonateur	71
4) Remarques	74

<u>IV - C O N C L U S I O N . G E N E R A L E </u>	77
---	----

*REGIMES TRANSITOIRES DANS LES
RESONATEURS A QUARTZ SOUMIS A DES
VARIATIONS RAPIDES DE TEMPERATURE*

P R E M I E R E P A R T I E

I - INTRODUCTION

Les résonateurs à quartz connaissent actuellement un développement important et une utilisation pratique grandissante. En effet, les récents progrès techniques sur la fabrication et la réalisation des oscillateurs, sur les traitements des cristaux proprement dit, font que les quartz actuels ont des stabilités et des facteurs de qualité tout à fait remarquables.

Ainsi la stabilité en fréquence des meilleurs résonateurs étalons est de l'ordre de 10^{-12} sur des temps d'intégration de quelques secondes et le facteur de qualité Q est souvent supérieur à $2 \cdot 10^6$.

Les fréquences des résonateurs utilisés dans les différents domaines s'étendent sur une plage très importante qui va en général de quelques KHz à 100 MHz et plus pour les vibrations en élongation, cisaillement d'épaisseur et de surface.

La mise au point récente de résonateurs à ondes de surface devrait permettre d'atteindre des fréquences supérieures au GHz.

A - POSITION ET IMPORTANCE DU PROBLEME

Tous ces résonateurs utilisés dans les oscillateurs de grande stabilité doivent présenter le minimum de sensibilité aux influences extérieures et particulièrement à la température.

Le choix d'un angle de coupe judicieux permet d'obtenir des coefficients de température du 1er ordre et 2ième ordre nuls (coupe AT par exemple).

L'étude des cristaux à double rotation permet encore une meilleure détermination des autres coefficients et souvent ceux d'ordre supérieur.

Dans ces conditions un thermostat permet déjà d'obtenir d'excellent résultats. Toutefois l'utilisation d'horloges embarquées notamment dans les engins fait qu'il n'est pas toujours possible d'utiliser un thermostat en raison de son encombrement et de son poids. Le résonateur peut alors être soumis à des variations rapides de température. Dans ces conditions le nouvel équilibre thermique ne s'établit pas instantanément, mais seulement après un intervalle de temps assez important. Le passage de l'état d'équilibre initial à l'état d'équilibre final s'effectue suivant un régime transitoire que l'on peut observer en examinant l'évolution de la fréquence du résonateur.

Dans un autre ordre d'idée la connaissance approfondie des lois de variations de la fréquence en fonction de certains paramètres (température, pressions ...) peut servir dans la réalisation de capteurs de grande précision, la fréquence représentant à l'heure actuelle la grandeur susceptible d'être mesurée avec le maximum de précision.

Dans un cas comme dans l'autre, les régimes transitoires sont extrêmement gênants surtout pour des mesures de grandeurs évoluant rapidement dans le temps. Il faut en effet que le temps de réponse du cristal soit le plus faible possible.

Le but du présent travail a donc été d'étudier les régimes transitoires thermiques dans les résonateurs.

Dans cette étude nous avons cherché à réaliser un résonateur à temps de réponse très faible pouvant même être utilisé en capteur de température avec un angle de coupe convenable.

B - RAPPELS SUR LES QUARTZ DE COUPE AT VIBRANT EN CISAILLE- MENT D'EPAISSEUR ; CARACTERISTIQUES FREQUENCE-TEMPERATURE

Nous ne disposerons pour les manipulations que de quartz de coupe AT vibrant en cisaillement d'épaisseur.

Ce seront des résonateurs fondamentaux ou partiel 5 vibrant le plus souvent à une fréquence de 5 MHz.

Ces quartz s'avèrent en effet bien adaptés aux oscillateurs utilisés au Laboratoire et possèdent d'excellents facteurs de qualité.

a) Définition des coefficients

Dans le cas le plus général la caractéristique fréquence-température d'une coupe AT peut être assimilée à une cubique (fig.1).

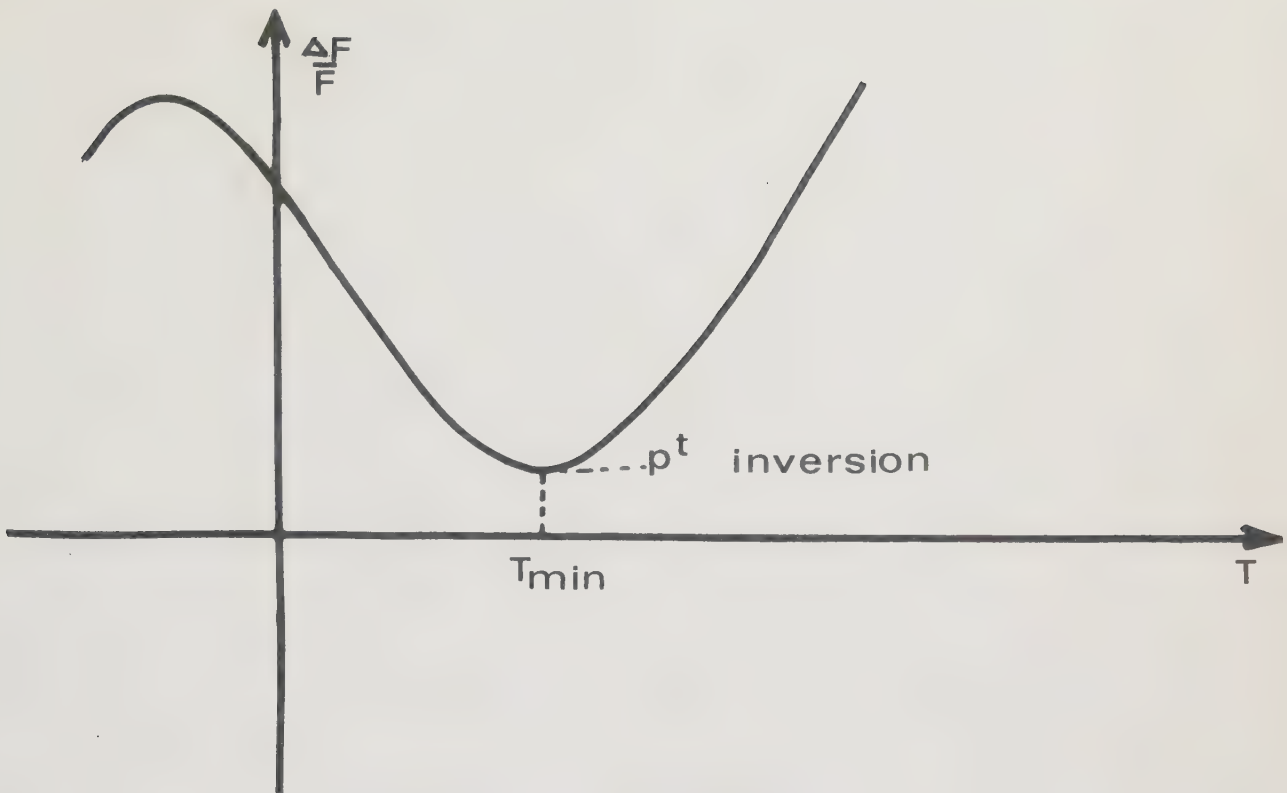


FIG:1

Le minimum est appelé point d'inversion ; cette variation de la fréquence en fonction de la température peut s'exprimer sous la forme d'un polynôme.

Pour obtenir une concordance satisfaisante entre résultats expérimentaux et théoriques, il est nécessaire d'aller jusqu'au 3ème ordre.

Nous écrivons :

$$f = f_0 \left[1 + \alpha_f^{(1)} (T - T_0) + \alpha_f^{(2)} (T - T_0)^2 + \alpha_f^{(3)} (T - T_0)^3 + \dots \right]$$

où f_0 représente la valeur de la fréquence f à la température T_0 et où $\alpha_f^{(1)}$, $\alpha_f^{(2)}$, $\alpha_f^{(3)}$ sont respectivement les coefficients de température du 1er, 2ème et 3ème ordre.

$$\alpha_f^{(1)} = \frac{1}{f_0} \left(\frac{df}{dT} \right)_{T=T_0}$$

$$\alpha_f^{(2)} = \frac{1}{2f_0} \left(\frac{d^2f}{dT^2} \right)_{T=T_0} \quad (2)$$

$$\alpha_f^{(3)} = \frac{1}{6f_0} \left(\frac{d^3f}{dT^3} \right)_{T=T_0}$$

De même au $n^{\text{ième}}$ ordre : $\alpha_f^{(n)} = \frac{1}{n!f_0} \left(\frac{d^nf}{dT^n} \right)_{T=T_0}$.

Ces coefficients ne dépendent que de l'angle de coupe θ pour les cristaux à simple rotation, θ et Φ pour les doubles rotations.

b) Calcul des coefficients de température - Influence de l'angle de coupe

Soient $\alpha_x^{(n)}$, $\alpha_y^{(n)}$ et $\alpha_z^{(n)}$ les coefficients de dilatation suivant les 3 axes OX, OY, OZ. On montre facilement que $\alpha_x^{(n)} = \alpha_y^{(n)}$.

Si l'on considère une rotation d'angle θ autour de OX, les axes OY et OZ sont changés en OY' et OZ'.

La plaque de quartz se présente de la façon suivante (fig.2).

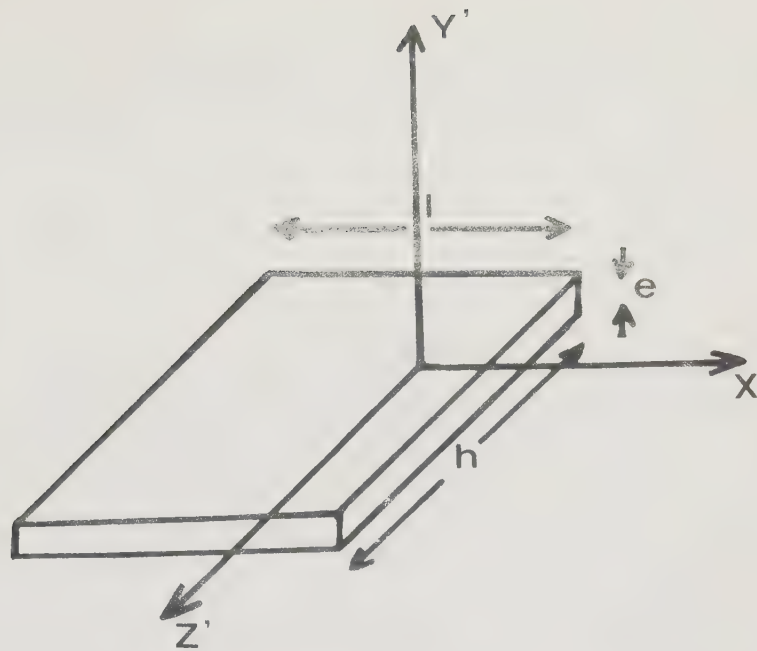


FIG: 2

On obtient alors de nouveaux coefficients :

$$\alpha_x^{(n)} = \alpha_{x'}^{(n)} ; \quad \alpha_{y'}^{(n)} , \quad \alpha_{z'}^{(n)}$$

Si les dimensions initiales d'une plaque de quartz de masse spécifique ρ_0 sont l_0 , h_0 et e_0 , nous aurons l , h , e et ρ comme valeurs correspondantes après le changement de température.

$$f_0 = \frac{1}{2e_0} \sqrt{\frac{C_{66}^D}{\rho_0}} \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2e} \sqrt{\frac{C_{66}^D}{\rho}} \quad (3)$$

représentent les fréquences initiales et finales du résonateur.

Nous pouvons écrire la variation relative de fréquence :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f - f_0}{f_0} = \alpha_f^{(1)} \cdot (T - T_0) + \alpha_f^{(2)} \cdot (T - T_0)^2 + \alpha_f^{(3)} \cdot (T - T_0)^3 \dots$$

$\alpha_f^{(1)}$, $\alpha_f^{(2)}$, $\alpha_f^{(3)}$ dépendent de l'angle de coupe θ du cristal ; ainsi nous avons :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0} (\theta, T)$$

Pour déterminer ces trois coefficients de température nous exprimons la variation des dimensions du cristal en fonction de la température :

$$l = l(\Delta T) ; h = h(\Delta T) ; e = e(\Delta T) ; C_{66} = C_{66}(\Delta T)$$

De même la densité s'écrit : $\rho = \rho(\Delta T)$

On définit ainsi les coefficients suivants :

$$\alpha_e^{(n)} = \frac{1}{n! e_0} \left(\frac{de^n}{dT^n} \right)_{T=T_0}$$

$$\alpha_l^{(n)} = \frac{1}{n! l_0} \left(\frac{dl^n}{dT^n} \right)_{T=T_0}$$

$$\alpha_h^{(n)} = \frac{1}{n! h_0} \left(\frac{dh^n}{dT^n} \right)_{T=T_0}$$

$$\alpha_{C_{66}}^{(n)} = \frac{1}{n! C_{66}^0} \left(\frac{d^n C_{66}}{dT^n} \right)_{T=T_0}$$

$$\alpha_\rho^{(n)} = \frac{1}{n! \rho_0} \left(\frac{d^n \rho}{dT^n} \right)_{T=T_0}$$

Les définitions (2) et l'équation (3) permettent de déterminer les coefficients de température :

$$\text{- premier ordre : } \alpha_f^{(1)} = -\alpha_e^{(1)} + \frac{1}{2} \alpha_{C_{66}}^{(1)} - \frac{1}{2} \alpha_\rho^{(1)}$$

- deuxième ordre :

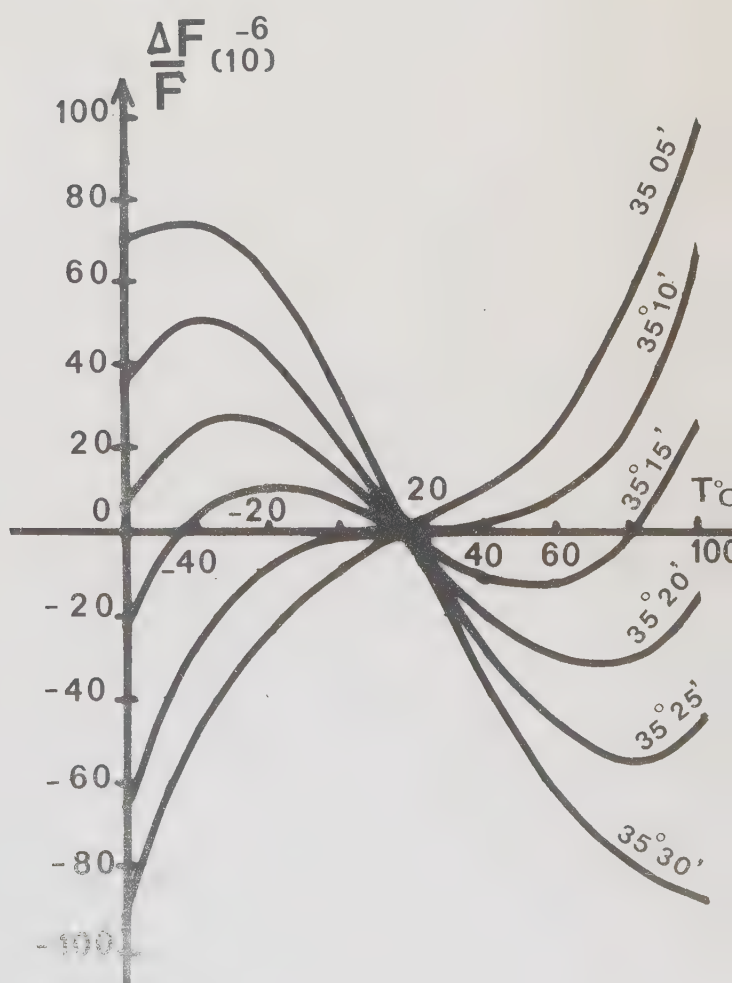
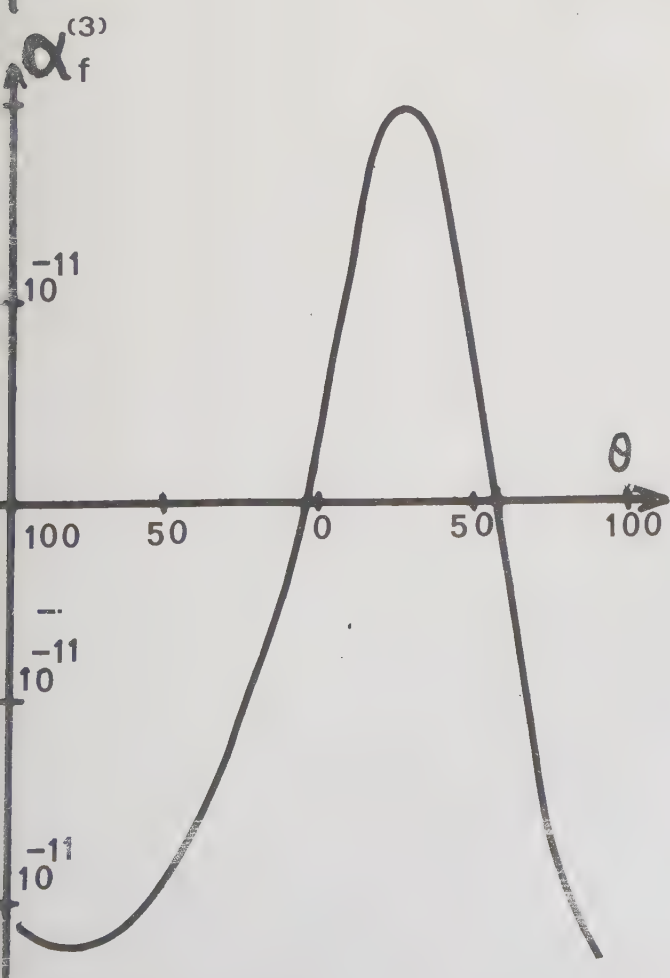
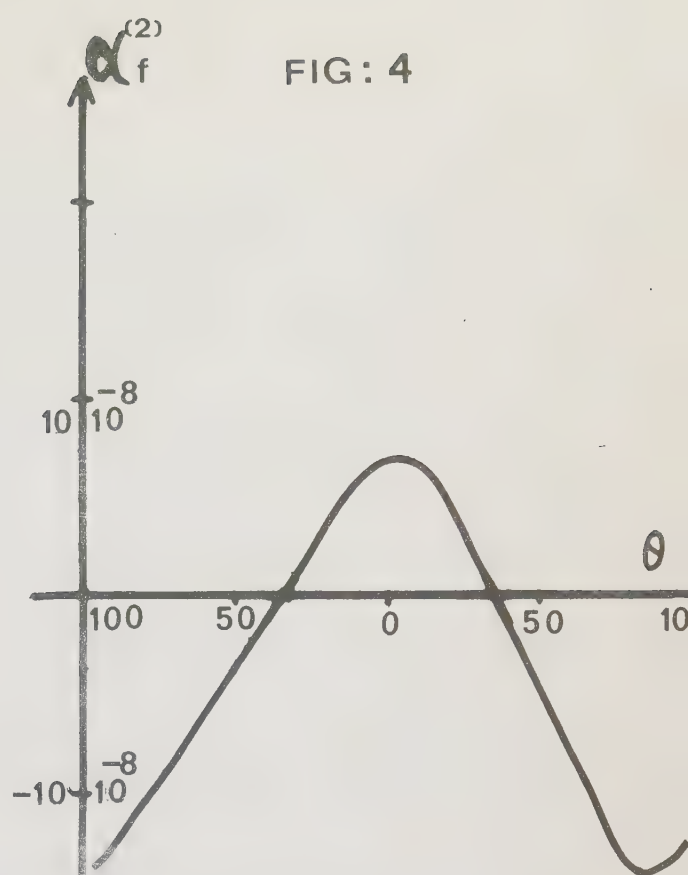
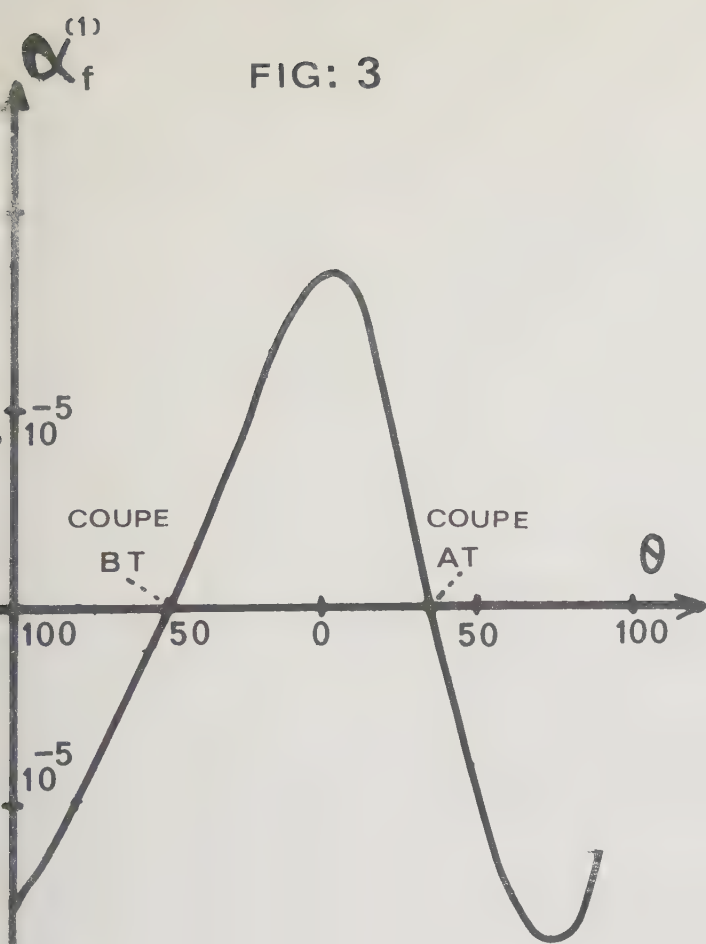
$$\alpha_f^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\alpha_f^{(1)2} + \alpha_e^{(1)2} - \frac{1}{2} \alpha_{C66}^{(1)2} + \frac{1}{2} \alpha_p^{(1)2} - 2 \alpha_e^{(2)} - \alpha_p^{(2)} + \alpha_{C66}^{(2)} \right]$$

- troisième ordre :

$$\alpha_f^{(3)} = \frac{1}{6} \left[\alpha_f^{(1)} (6 \alpha_f^{(2)} - 2 \alpha_f^{(1)2}) + (-2 \alpha_e^{(1)3} + \alpha_{C66}^{(1)3} - \alpha_p^{(1)3}) + (6 \alpha_e^{(1)} \alpha_e^{(2)} - 3 \alpha_{C66}^{(1)} \alpha_{C66}^{(2)} + \alpha_p^{(1)} \alpha_p^{(2)}) + (-6 \alpha_e^{(3)} + 3 \alpha_{C66}^{(3)} - 3 \alpha_p^{(3)}) \right]$$

Les valeurs $\alpha_e^{(n)}$, $\alpha_p^{(n)}$, $\alpha_{C66}^{(n)}$ en fonction de l'angle de coupe θ étant connues, les coefficients de température jusqu'à l'ordre 3 ont ainsi pu être représenté en fonction de θ . Ces variations sont représentées sur les figures 3, 4, 5. La figure 6 indique une famille de caractéristiques fréquence-température où l'angle θ intervient sous la forme de paramètre. Elle se déduit facilement des courbes précédentes. Pour avoir le maximum de stabilité, on thermostatise les résonateurs à des températures telles que la caractéristique présente un palier. De même on s'efforce de choisir des angles de coupe pour lesquels ces mêmes caractéristiques soient le plus plate possible (35°10' par exemple).

Par contre la mise au point de sondes thermiques de grande précision à quartz impose des pentes (fig.7) les plus fortes et les plus linéaires possible.



Ceci a été rendu possible par la réalisation de cristaux à double rotation. Nous ne nous étendrons toutefois pas sur ces calculs, par ailleurs très longs, et qui n'interviennent pas dans le cadre de notre étude(réf.h).

Il faut toutefois remarquer que tous les calculs réalisés jusqu'à maintenant, concernant l'influence de la température sur la fréquence des résonateurs à quartz sont des calculs effectués en considérant l'équilibre thermique réalisé. Toutes les caractéristiques représentées précédemment sont donc considérées comme statiques. L'étude des régimes transitoires doit permettre de déterminer le comportement dynamique de ces cristaux en température.

Des mesures précises de température évoluant rapidement dans le temps seront alors possible.

II - E T U D E E X P E R I M E N T A L E

A - MATERIEL UTILISE

L'appareillage utilisé nous a permis d'étudier avec une bonne précision la réponse en fréquence de résonateurs à quartz soumis à une variation rapide de température.

Le dispositif conçu au Laboratoire permet de réaliser des échelons de température d'amplitude variable et avec la précision suffisante. Ces échelons sont reproductibles pour des températures comprises entre la température ambiante et 90°C, ceci afin de tester des résonateurs dont les points d'inversion peuvent se situer à des températures très différentes.

Cet appareillage peut en outre être utilisé afin de réaliser une variation de température lente mais sur une grande plage afin de tracer les courbes $\frac{\Delta f}{f} = f(T)$.

Le dispositif comprend trois parties bien distinctes :

- un dispositif de contrôle de température avec :
 - . une enceinte thermostatée
 - . une régulation électronique proportionnelle
 - . un chauffage rapide
 - . un thermomètre électronique
- un dispositif de contrôle de fréquence avec :
 - . un oscillateur
 - . un étalon de fréquence variable (synthétiseur)
 - . un convertisseur fréquence-tension
- un dispositif d'enregistrement constitué par une table traçante.

Nous ne nous étendrons pas ici sur le détail de la réalisation électronique qui a déjà fait l'objet d'un Travail de Diplôme (réf.k) Toutefois, une description sommaire s'impose :

1) Dispositif de contrôle de température

a) L'enceinte thermostatée

Elle est constituée par :

- un boîtier de cuivre avec couvercle. Il supporte la résistance de chauffage de la régulation, la résistance de mesure, une partie de la résistance de chauffage rapide ; il contient un support léger constitué de quatre tiges de bakélite sur lequel est bobiné l'autre partie de la résistance de chauffage rapide, et bien entendu le résonateur à quartz ;
- un vase Dewar pour la conservation de la chaleur ;
- une enveloppe en polystyrène expansé pour l'isolement thermique.

Le schéma général de l'enceinte figure à la page suivante (fig.7)

b) La régulation électronique

Son principe de fonctionnement consiste à envoyer deux tensions différentes sur les bases d'un amplificateur différentiel.

La tension e_1 de référence est recueillie aux bornes d'une résistance variable suffisamment précise (boîte à décades de 0,1 à 0,2 %) susceptible de prendre différentes valeurs.

ENCEINTE THERMOSTATEE

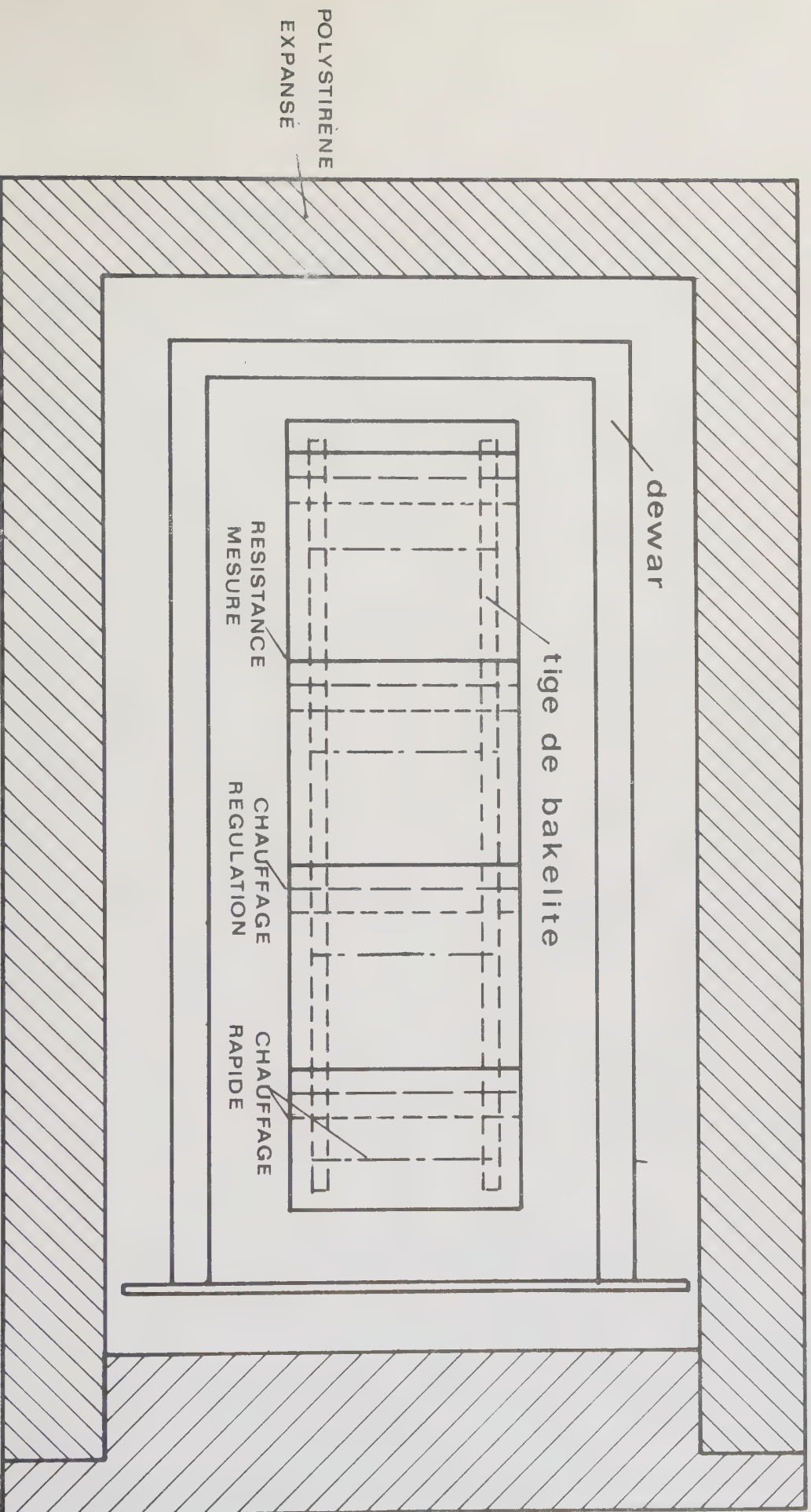


FIG: 7

La tension e_2 est prise aux bornes d'une résistance variant linéairement en fonction de la température et qui est bobinée sur le boîtier.

La différence de ces deux tensions, amplifiée alimente ensuite un amplificateur Darlington. Le courant ainsi débité chauffe l'enceinte.

Le schéma en est représenté sur la figure 8.

c) Le chauffage rapide

La réalisation pratique de chocs de température nécessite une puissance de chauffe incompatible avec la précision demandée à la régulation.

Nous avons donc ajouté un dispositif capable de fournir rapidement à l'enceinte l'énergie nécessaire pour passer d'un palier régulé au palier supérieur. Une alimentation de forte puissance débite un courant d'intensité connue dans une résistance bobinée à la fois sur le boîtier et sur le support de Bakélite. Ce courant est établi pendant une durée choisie grâce à un chronomètre et à un interrupteur manuel placé dans le circuit.

d) Thermomètre électronique

En raison de l'inertie thermique des appareils utilisés couramment, il est difficile de connaître avec précision une température et de suivre ses variations. Nous nous sommes donc efforcés de mettre au point un dispositif à diodes et à transistors (fig.9).

regulation de temperature

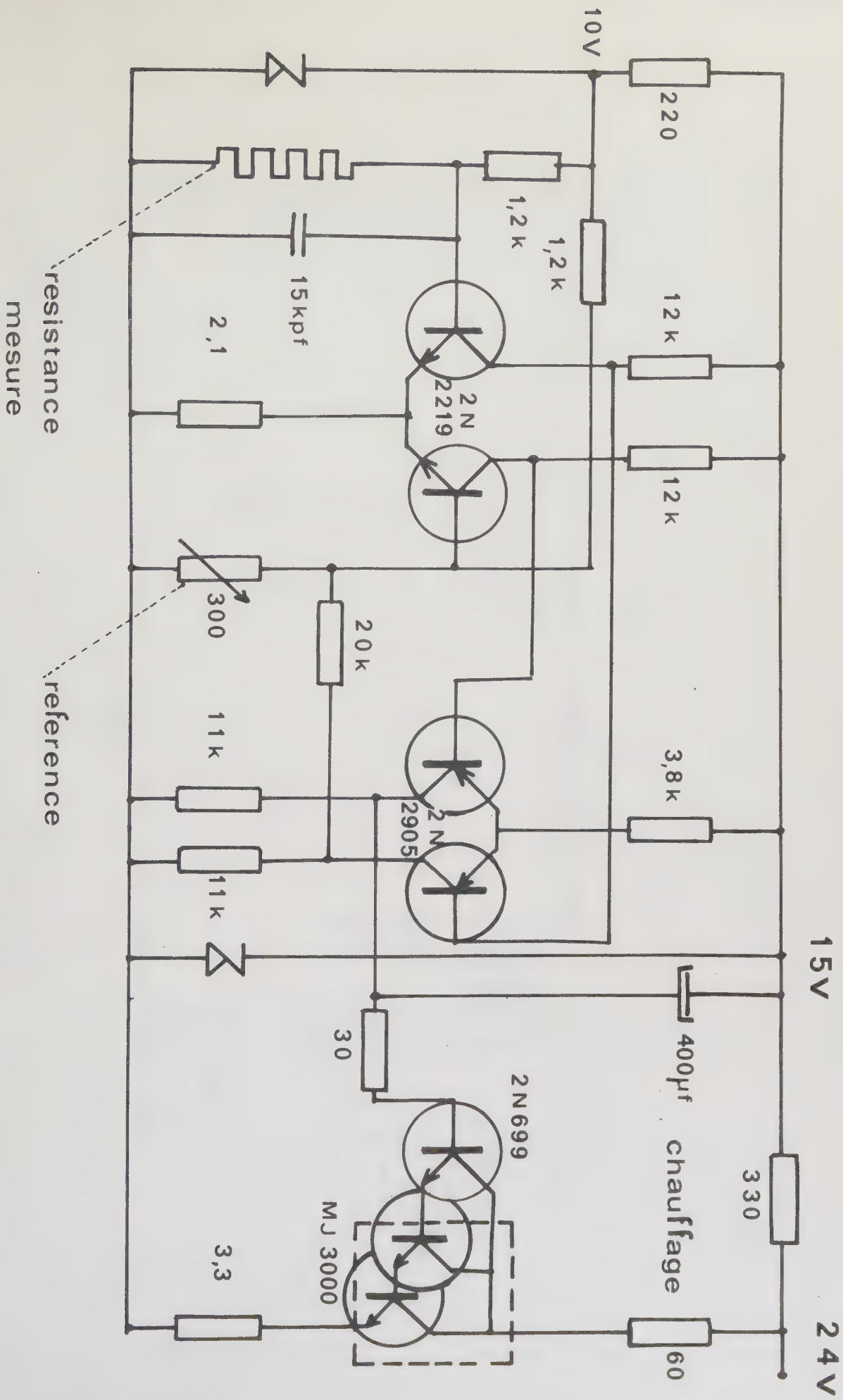


Fig : 8

thermometre

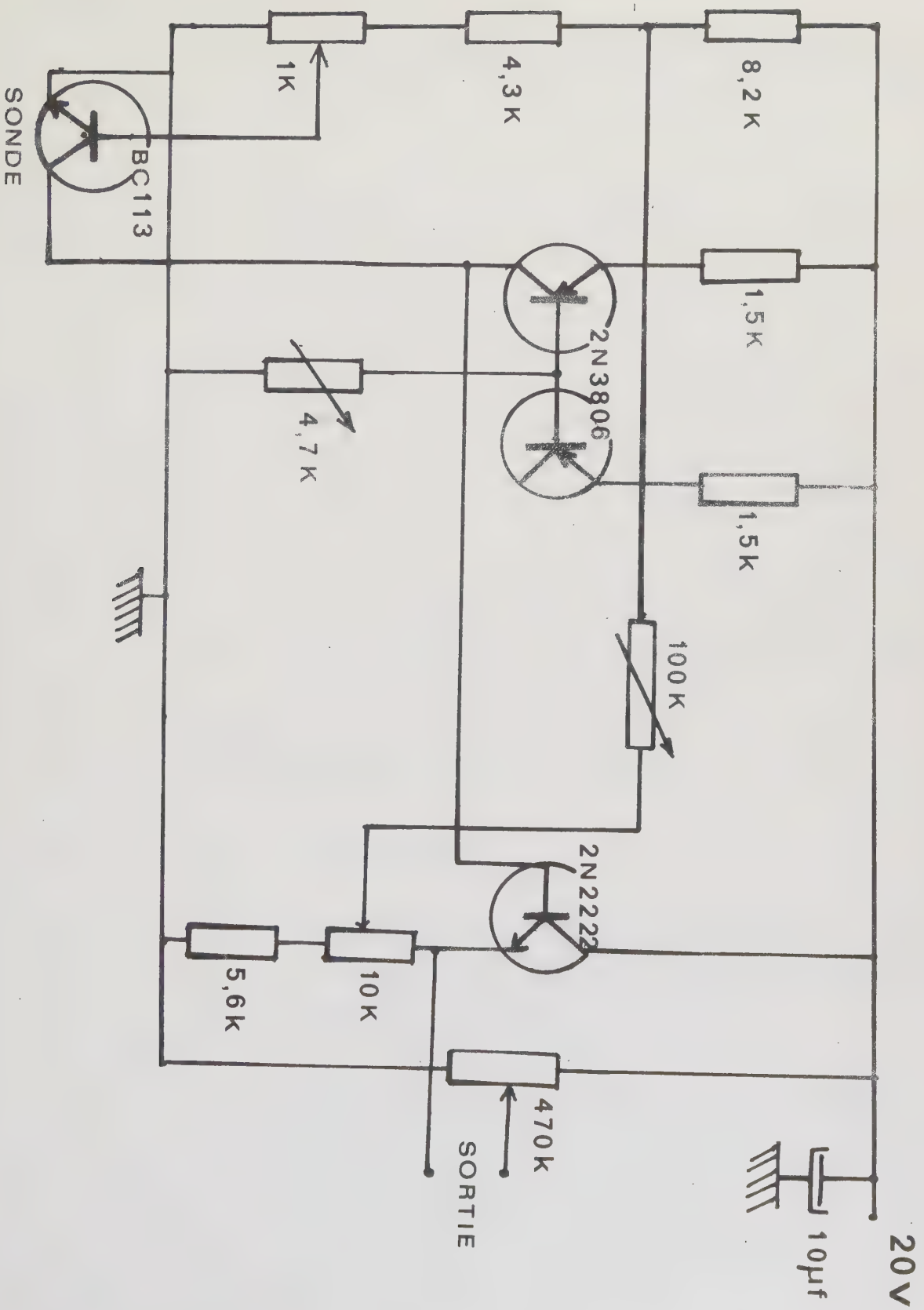


Fig : 9

Son principe utilise le déplacement reproductible des caractéristiques d'un transistor avec la température (réf.K).

Sa sensibilité permet de connaître les températures comprises entre la température ambiante et 90°C.

Nous utilisons son temps de réponse très faible (≈ 1 s) pour connaître l'allure de la variation de température. Les températures initiales et finales étant données avec précision par l'étalonnage de la régulation. Le transistor du type BC 113 boîtier plastique est alimenté en courant constant.

Monté en sonde et fixé contre l'ampoule du résonateur, il joue le rôle d'une résistance variable. C'est la tension relevée aux bornes du collecteur qui est alors enregistrée par la table traçante.

2) Dispositif de contrôle de fréquence

a) L'oscillateur

C'est un oscillateur classique de type Butler, sans capacité série, stabilisé en tension muni d'un contrôle automatique de niveau, (fig.10).

Il est maintenu à l'écart des variations thermiques ; seul le résonateur monté en sonde et placé dans l'enceinte subit le choc de température. Ce type d'oscillateur associé au résonateur AT 5 MHz, lui-même thermostaté nous donne une stabilité supérieure à 1.10^{-9} sur un temps d'environ 15 à 20 minutes.

13v



b) Un étalon de fréquence variable

Il s'agit de notre horloge de référence.

Le battement entre cette horloge et notre oscillateur, transformé en variation de tension continue permet de connaître la variation de fréquence du résonateur.

Sa stabilité est supérieure à 10^{-10} pour les temps d'intégration mentionné plus haut. Il s'agit d'un synthétiseur de fréquence (0 → 50 MHz) du commerce dont on peut ajuster la fréquence à une valeur choisie.

c) Convertisseur fréquence-tension

Nous avons construit un convertisseur fréquence-tension 5 MHz de grande stabilité capable de détecter sous forme de variations de tension continue les variations de fréquence correspondantes du résonateur. Sa linéarité est rigoureuse sur une plage d'environ 200 Hz. Pour disposer d'une grande sensibilité nécessaire à la détection de variations voisines de 10^{-10} , nous y avons ajouté une référence ajustable.

Le schéma de principe du convertisseur (fig.11) et ceux de ses principaux étages constitutifs, fig.12, 13, 14, 15 sont représentés sur les pages suivantes.

La sortie est envoyée, comme pour la température sur la table traçante.

3) Dispositif d'enregistrement

Constitué d'une table traçante, il est représenté sur le schéma général du dispositif expérimental (fig.16).

Nous disposons donc simultanément : des données : $T(t)$ et $F(t)$.

convertisseur

5Mhz

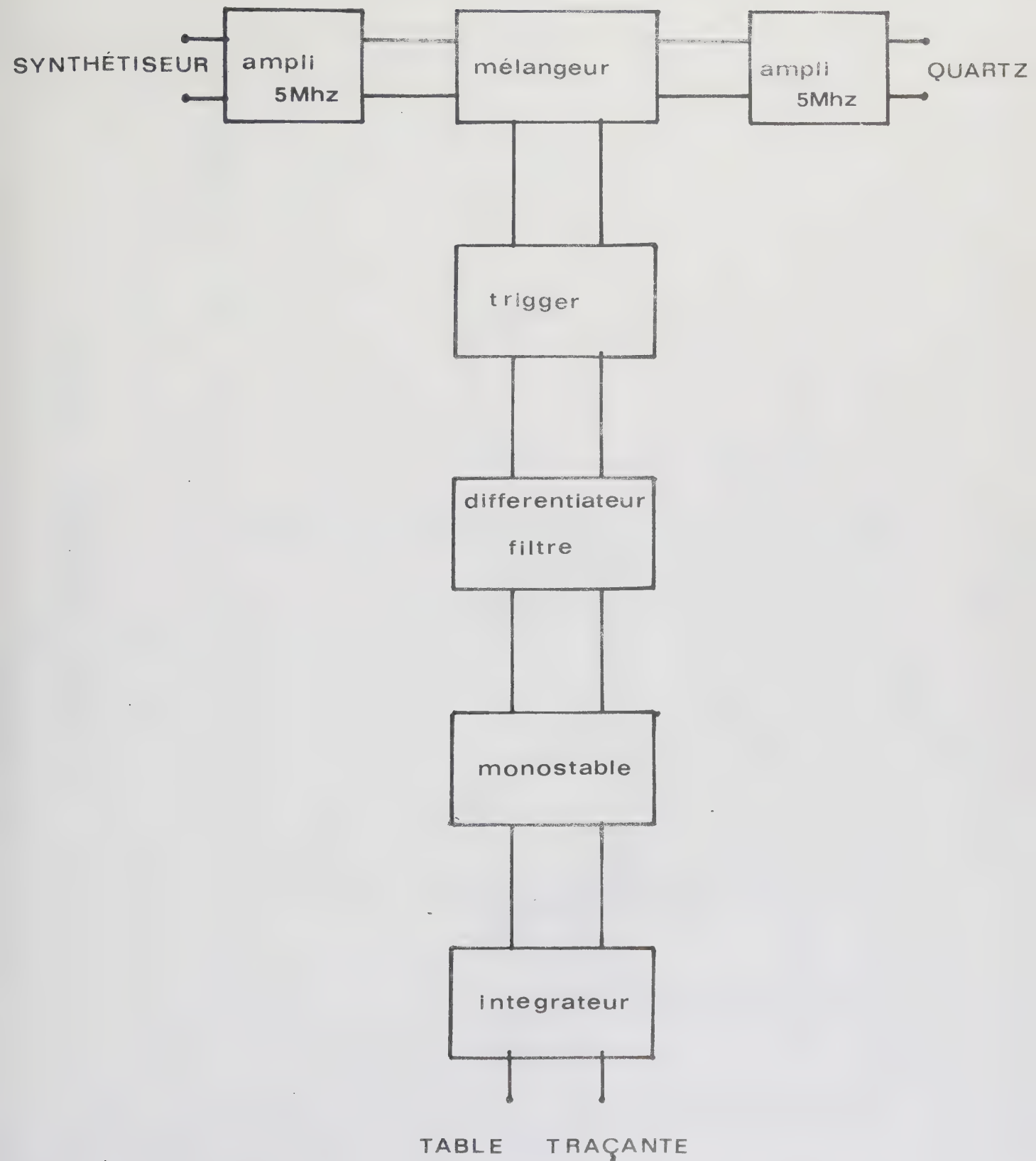


Fig:11

amplificateur 5 Mhz

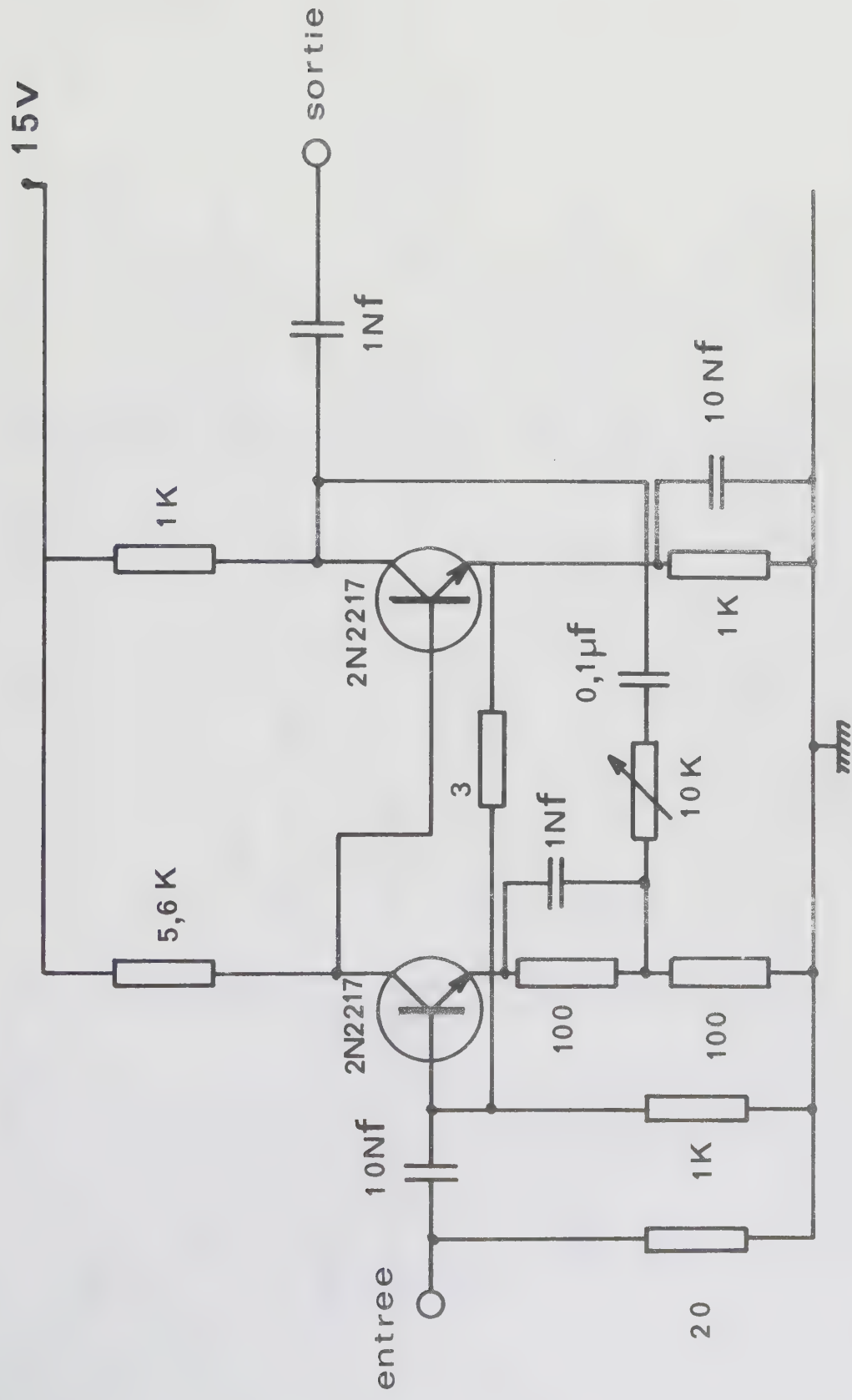
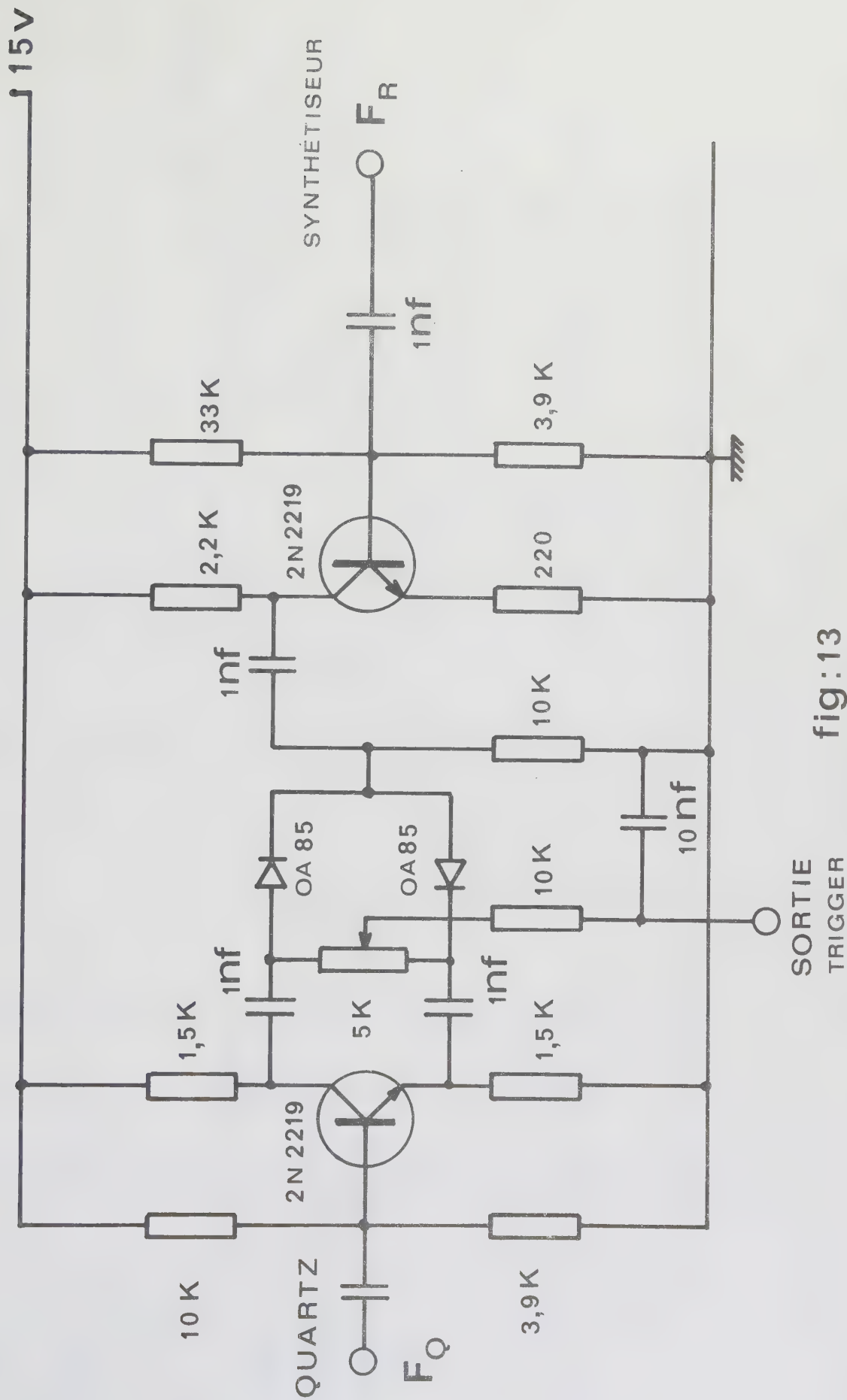


Fig:12

melangeur



trigger , différentiateur , filtre

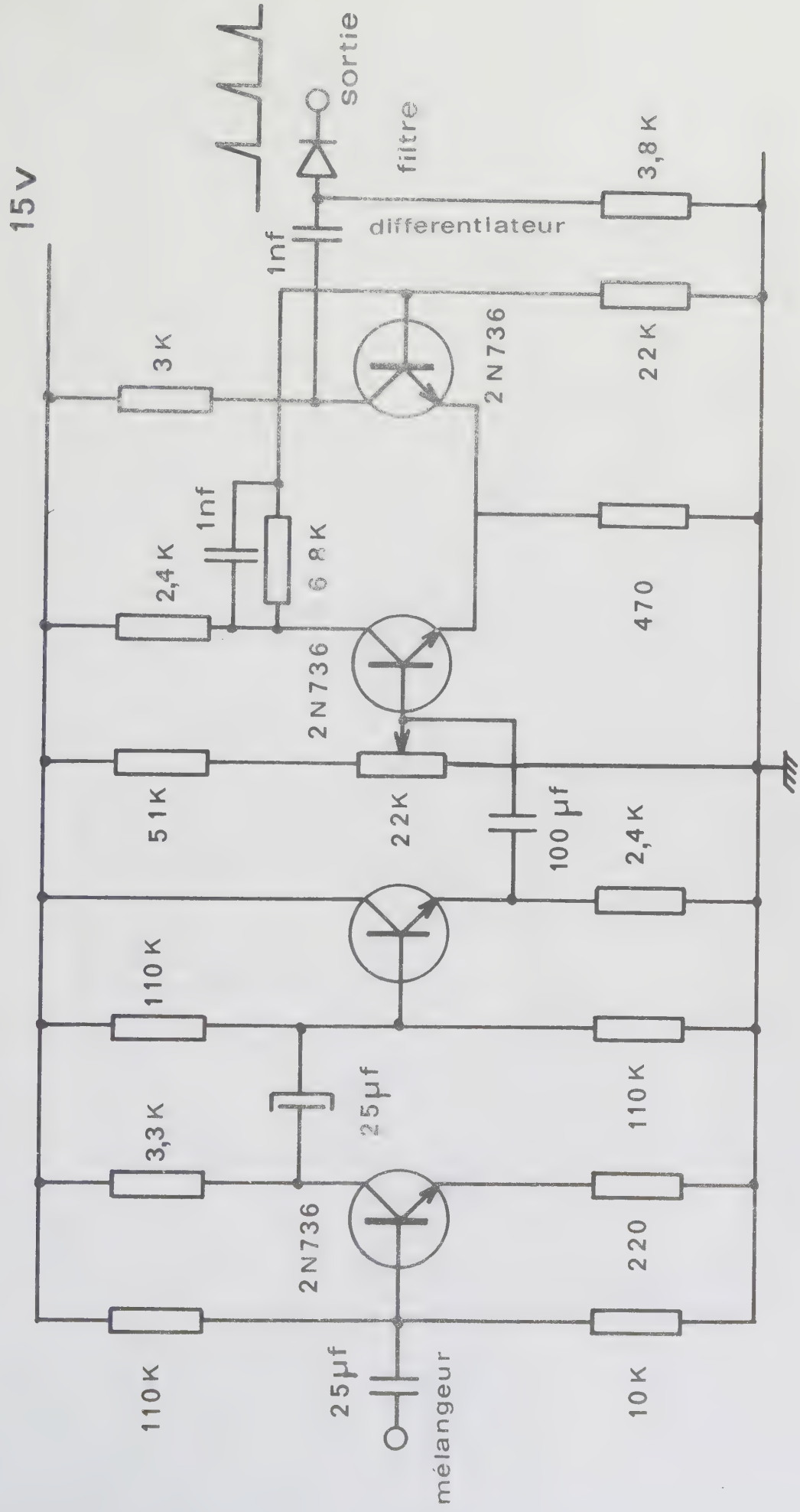


Fig : 14

monostable , integrateur

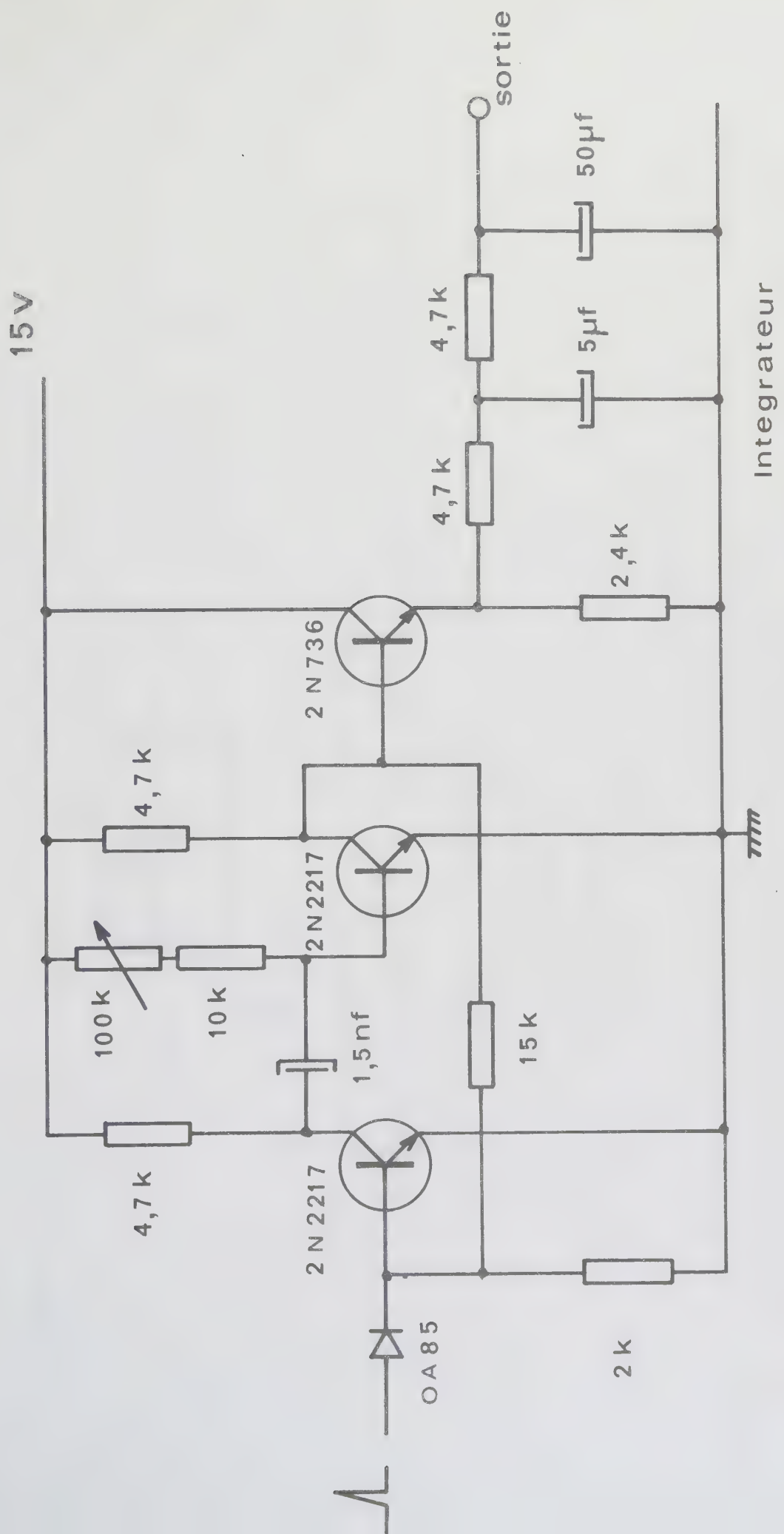


Fig : 15

dispositif expérimental

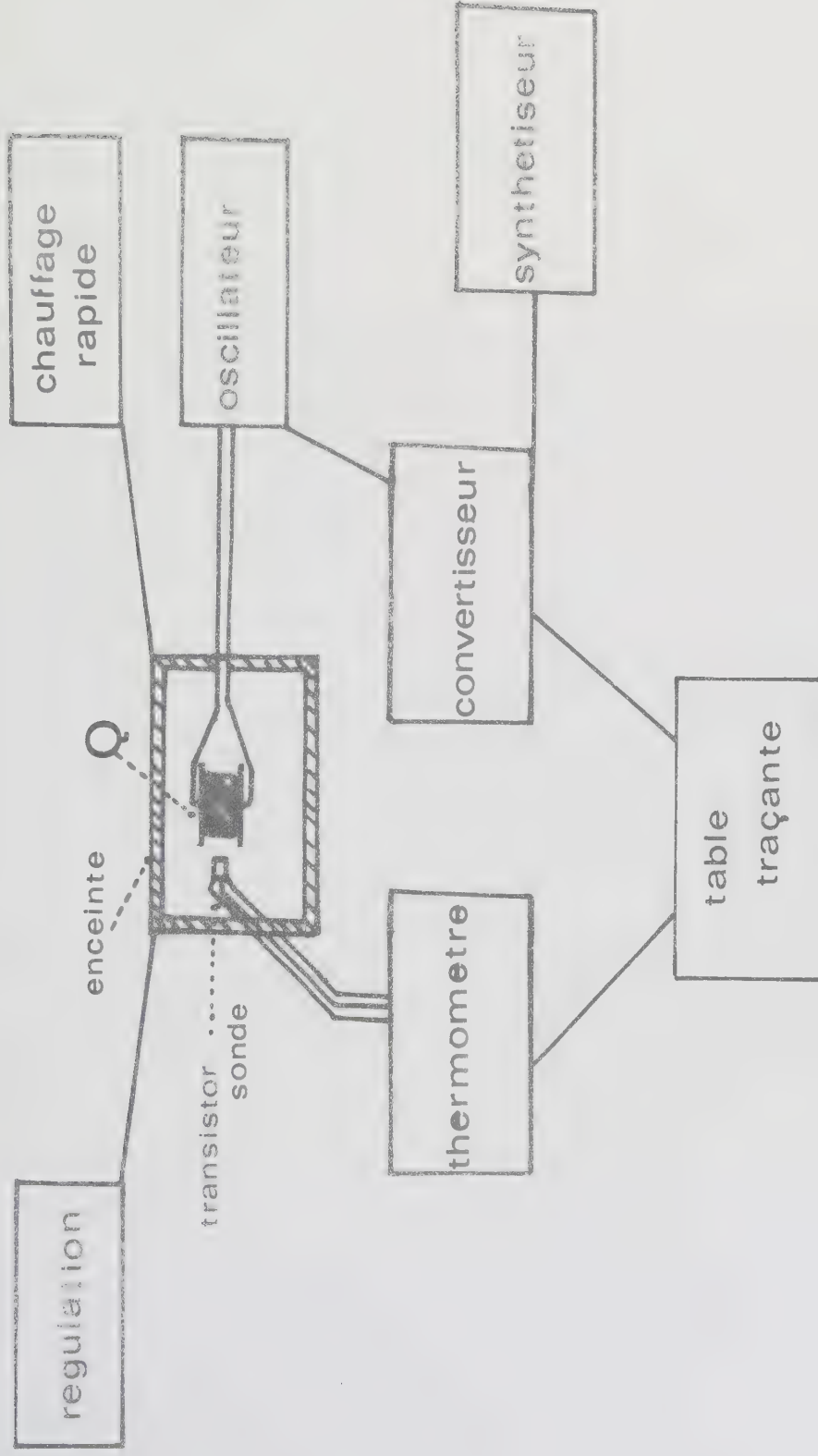


Fig : 16

DEUXIEME PARTIE

B - MISE EN EVIDENCE DES REGIMES TRANSITOIRES

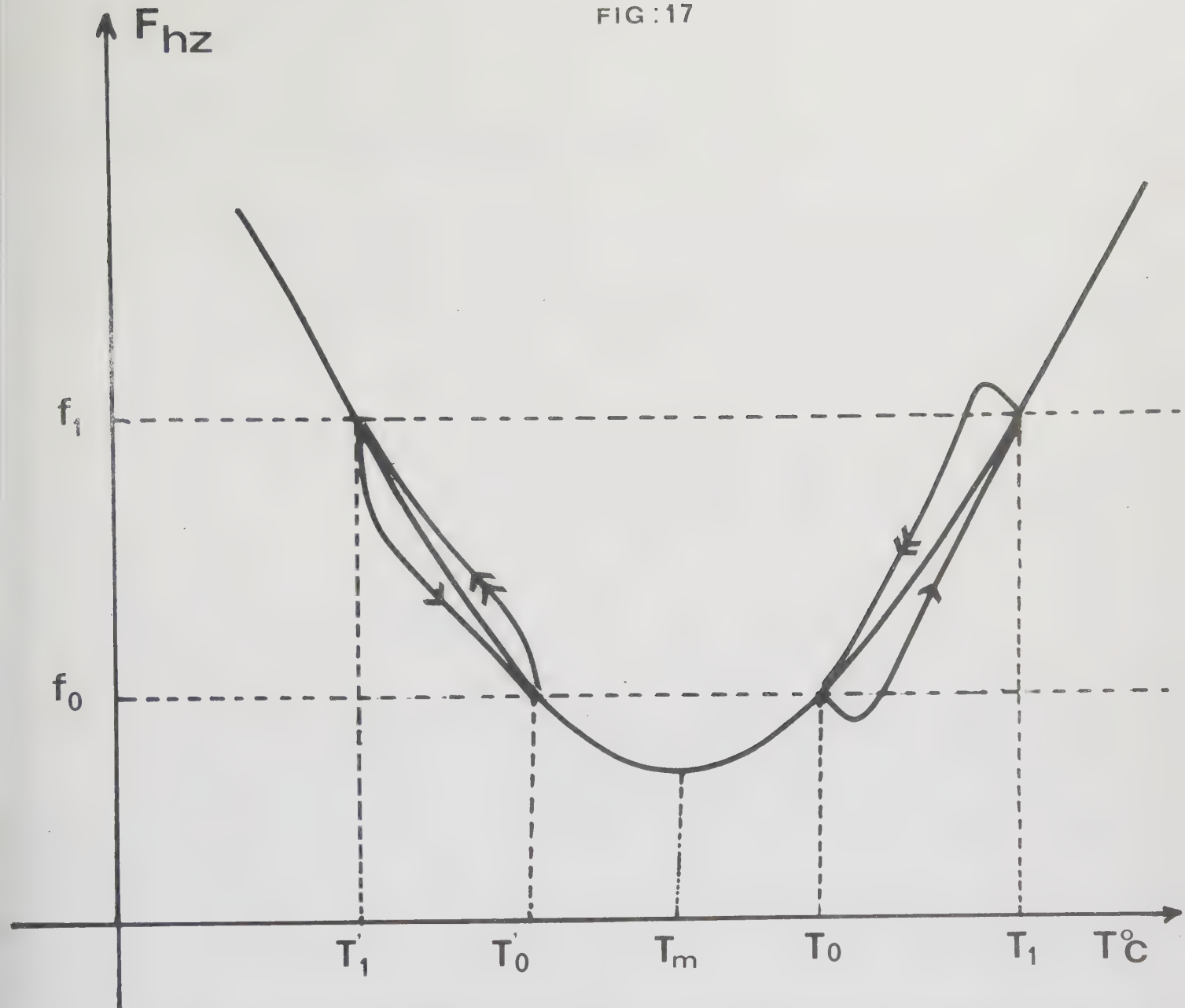
1) Description

Dans un premier temps les résonateurs étudiés sont des plaques circulaires vibrant en cisaillement d'épaisseur, en partiel 5, et placés sous vide (10^{-3} Torr) dans une ampoule de verre.

Pour de tels résonateurs, les courbes fréquence-température ainsi que nous l'avons vu dans le chapitre précédent sont des cubiques.

Lorsqu'on soumet le résonateur à une variation brutale de température, la courbe de variation de fréquence s'éloigne de la caractéristique statique en présentant un extremum (fig.17).

FIG:17



Regime transitoire d'un resonateur soumis à une variation cyclique de temperature

Si dans la partie croissante de la caractéristique la température passe de la valeur initiale T_0 à une valeur finale T_1 , la fréquence du résonateur variera de f_0 à f_1 mais le régime transitoire présentera toujours une diminution de fréquence à son début. Si l'on revient de T_1 à T_0 on observe le phénomène inverse. Dans le cas où les températures sont inférieures à T_{min} (partie décroissante de la courbe) les mêmes phénomènes existent ; ils sont toutefois moins apparents en raison du sens de variation de la fréquence.

2) Interprétation physique

Nous attribuons l'existence de ces phénomènes à l'apparition de contraintes que l'on peut considérer comme étant des contraintes quasi statiques par rapport aux contraintes dynamiques et qui sont dues à une répartition non homogène de la température (ref. f).

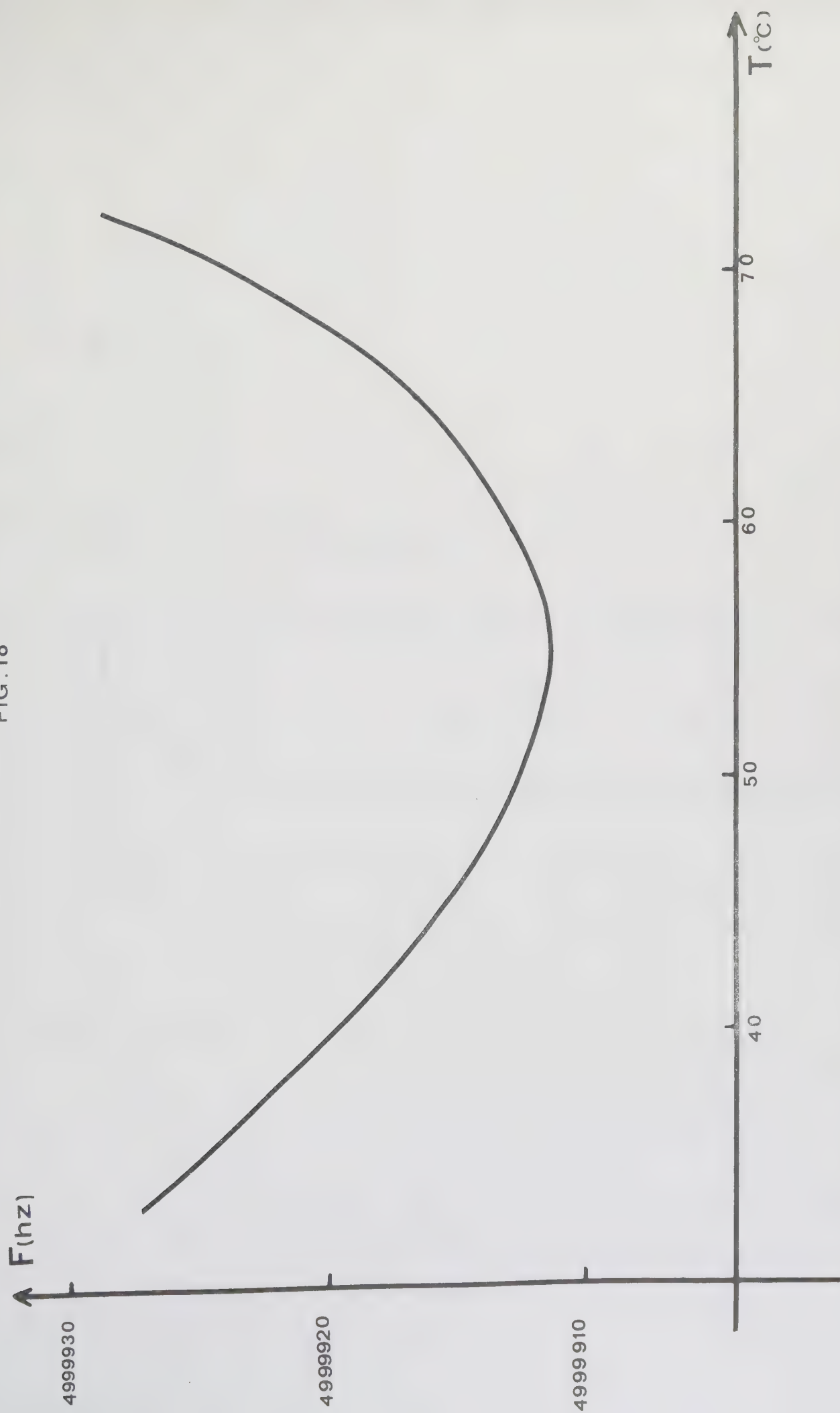
Nous entendons par homogène une répartition où les gradients de température sont constants. (Ils ne sont pas nécessairement nuls).

C - ETUDE QUALITATIVE

Le quartz utilisé ici est un partiel 5, AT, électrodes à bouton central, vibrant en cisaillement d'épaisseur à 5 MHz. Sa courbe $f = f(T)$ est représentée sur la figure 18. Nous nous sommes placés dans la partie croissante de la caractéristique ($T > T_{\min}$).

Les échelons de température réalisés correspondent à une élévation de l'ordre de $1,3^{\circ}\text{C}$ en 10 s. La courbe de réponse obtenue pour un tel échelon est représenté sur la figure 19. Sur cette même figure la courbe en trait pointillé correspond au régime transitoire qui serait obtenu si la fréquence suivait en permanence la courbe de variation statique.

FIG:18



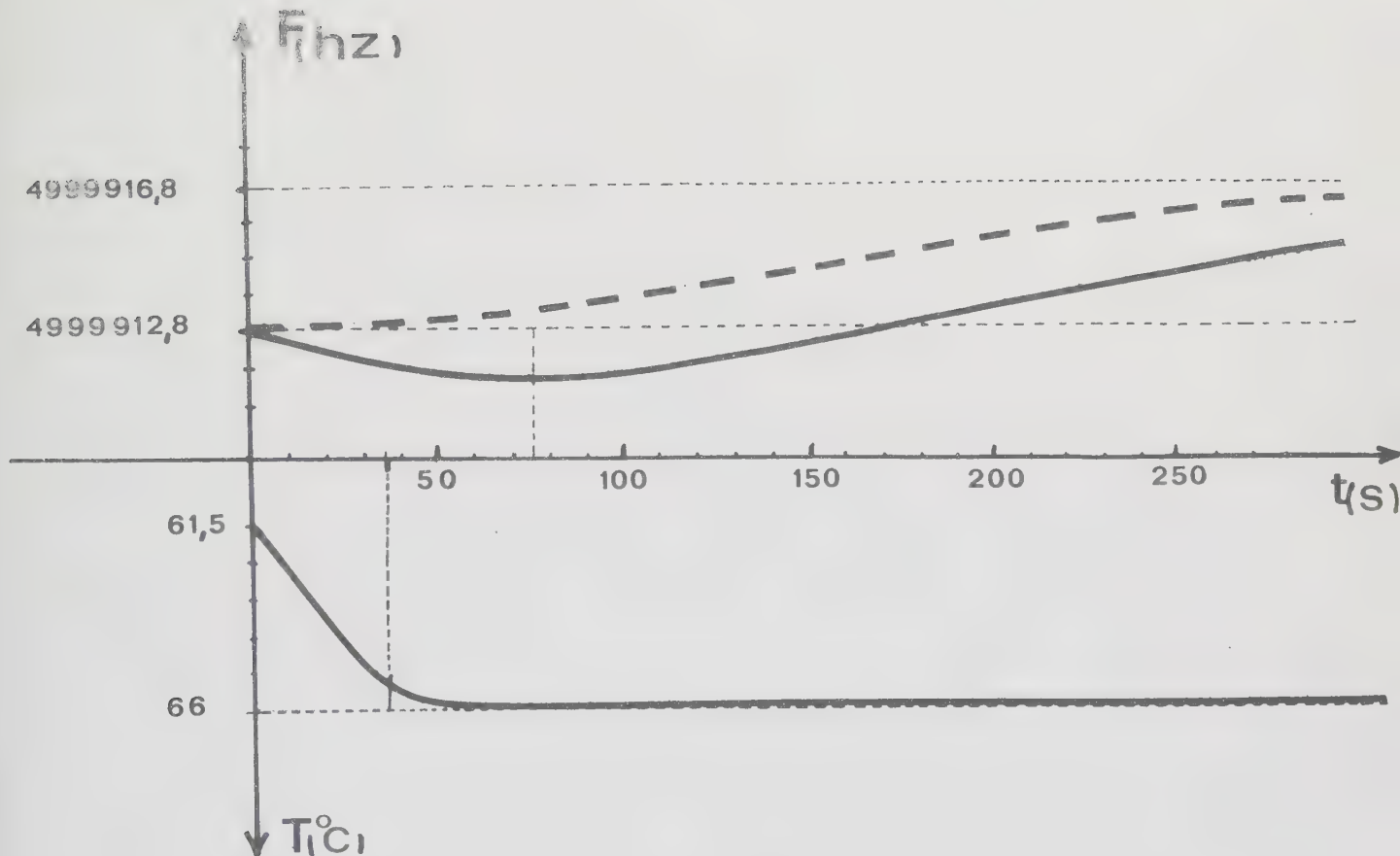


FIG : 19

Reponse du resonateur soumis à un echelon de temperature

Dans les expériences qui suivent nous ne tracerons que les variations de fréquence en fonction du temps.

Nous avons répété ces expériences pour différentes amplitudes de l'échelon de température mais en conservant une vitesse de chauffage constante de l'enceinte. Par la suite c'est cette même vitesse de chauffage qui sera la variable, l'amplitude de l'échelon, la constante.

3.1 Vitesse de chauffage constante - Influence de l'échelon

La montée en température de l'enceinte a été fixée à $8^{\circ}\text{C}/\text{mi-}$
nute. Nous ne nous intéresserons dans un premier temps qu'au
début du régime transitoire, c'est-à-dire à la variation
négative de fréquence.

De façon pratique nous noterons Δf_1 , l'écart correspondant
à l'échelon de température $\Delta T_1 = T_1 - T_0$.

De même Δf_2 correspond à $\Delta T_2 = T_2 - T_0$.

Par extension Δf_{∞} représente l'écart maximal lorsque la
température finale n'est pas fixée. L'enceinte est alors
constamment chauffée à la vitesse de $8^{\circ}\text{C}/\text{minute}$.

Toute cette famille de courbe est représentée sur la figure 20.

Il est remarquable de constater qu'à partir d'une certaine
valeur $\Delta T > 15^{\circ}\text{C}$ la valeur Δf_1 ne varie plus. Nous obtenons
une courbe limite Δf_{∞} que l'on peut considérer comme enveloppe
dans sa partie négative.

Nous pouvons en déduire facilement la relation variation de
fréquence-amplitude de l'échelon. Nous obtenons la courbe
suivante (fig.21).

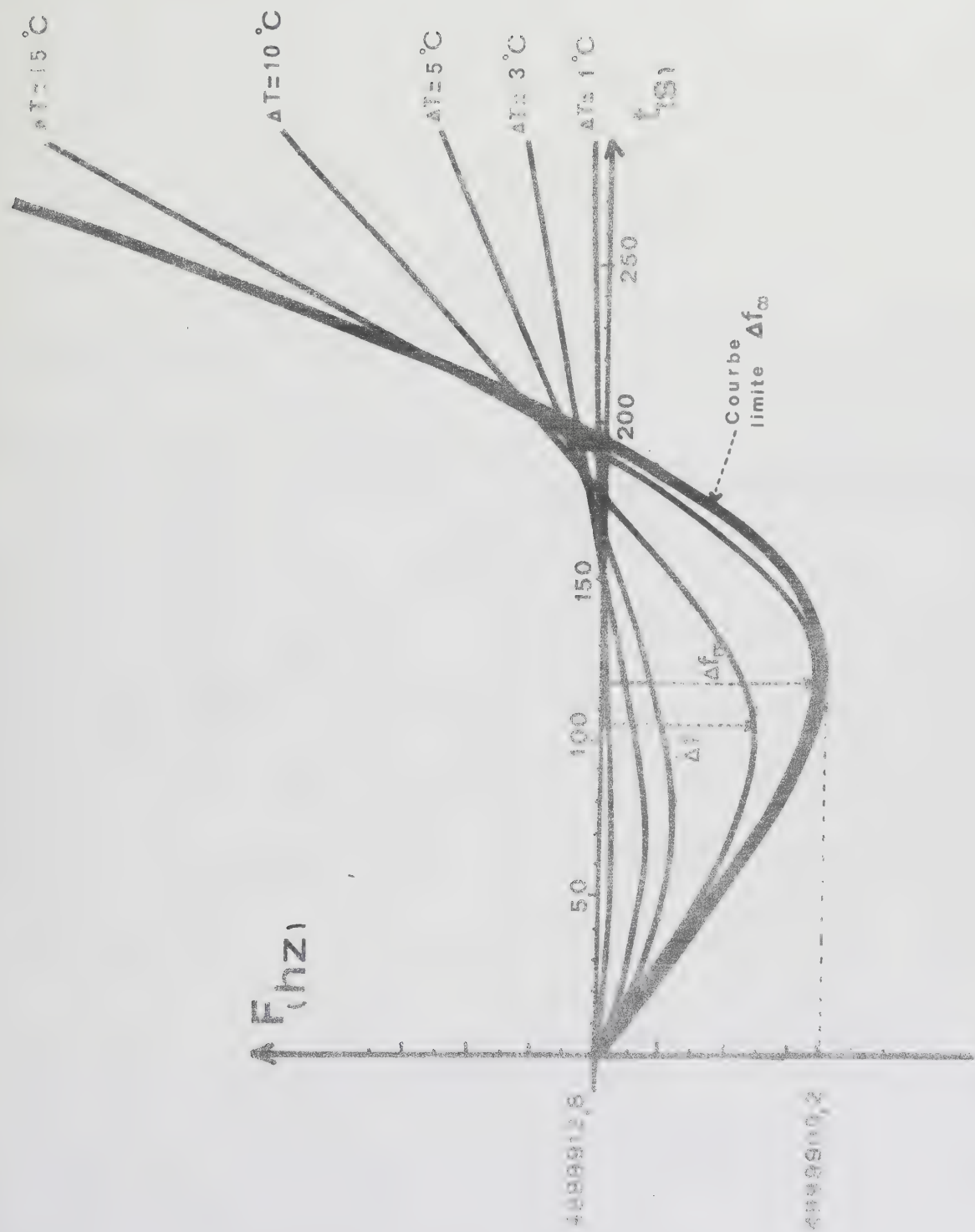
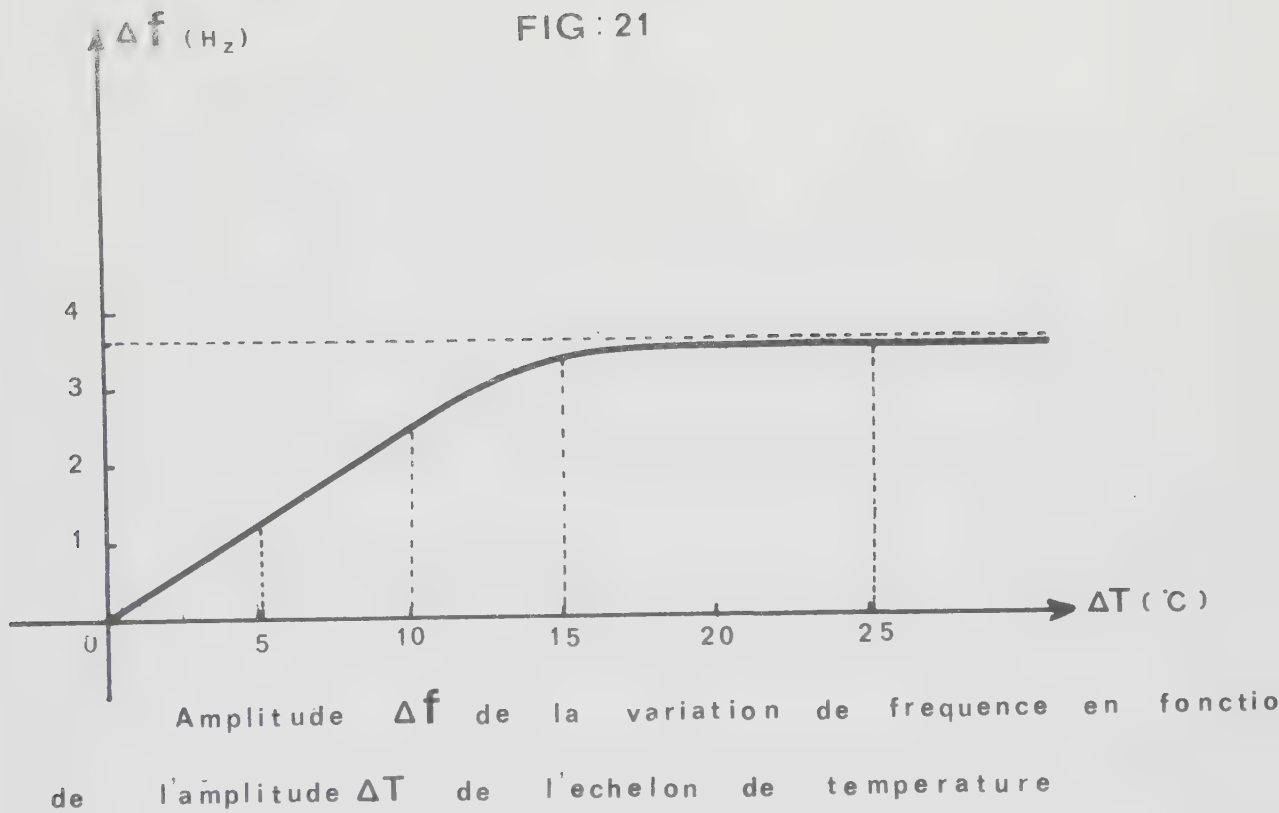


FIG: 20 Influence de l'echelon de temperature



Pour $\Delta T < 15^\circ\text{C}$, l'écart négatif de fréquence sera proportionnel à l'amplitude de l'échelon.

Pour $\Delta T < 15^\circ\text{C}$ nous obtenons un phénomène de saturation.

Nous pouvons donc écrire pour $\Delta T < 15^\circ\text{C}$ $\Delta f \approx K \Delta T$. K est ici une constante.

En fait comme nous le verrons par la suite K dépend de la vitesse de chauffage $K = K(V_c)$.

2) Vitesse de chauffage variable

a) Variation de Δf_∞

Dans la suite des manipulations nous ne considérons que la courbe limite définie précédemment. Elle apparaît pour un cristal donné uniquement fonction de la vitesse de chauffage (pente de l'échelon de température).

Nous avons enregistré les évolutions des régimes transitoires limite en fonction de cette vitesse de chauffage. Les résultats sont représentés sur la figure 22.

Nous observons également une loi de variation asymptotique ainsi que le montre la figure 23 où sont portées les variations de Δf_{limite} en fonction de la vitesse de chauffage.

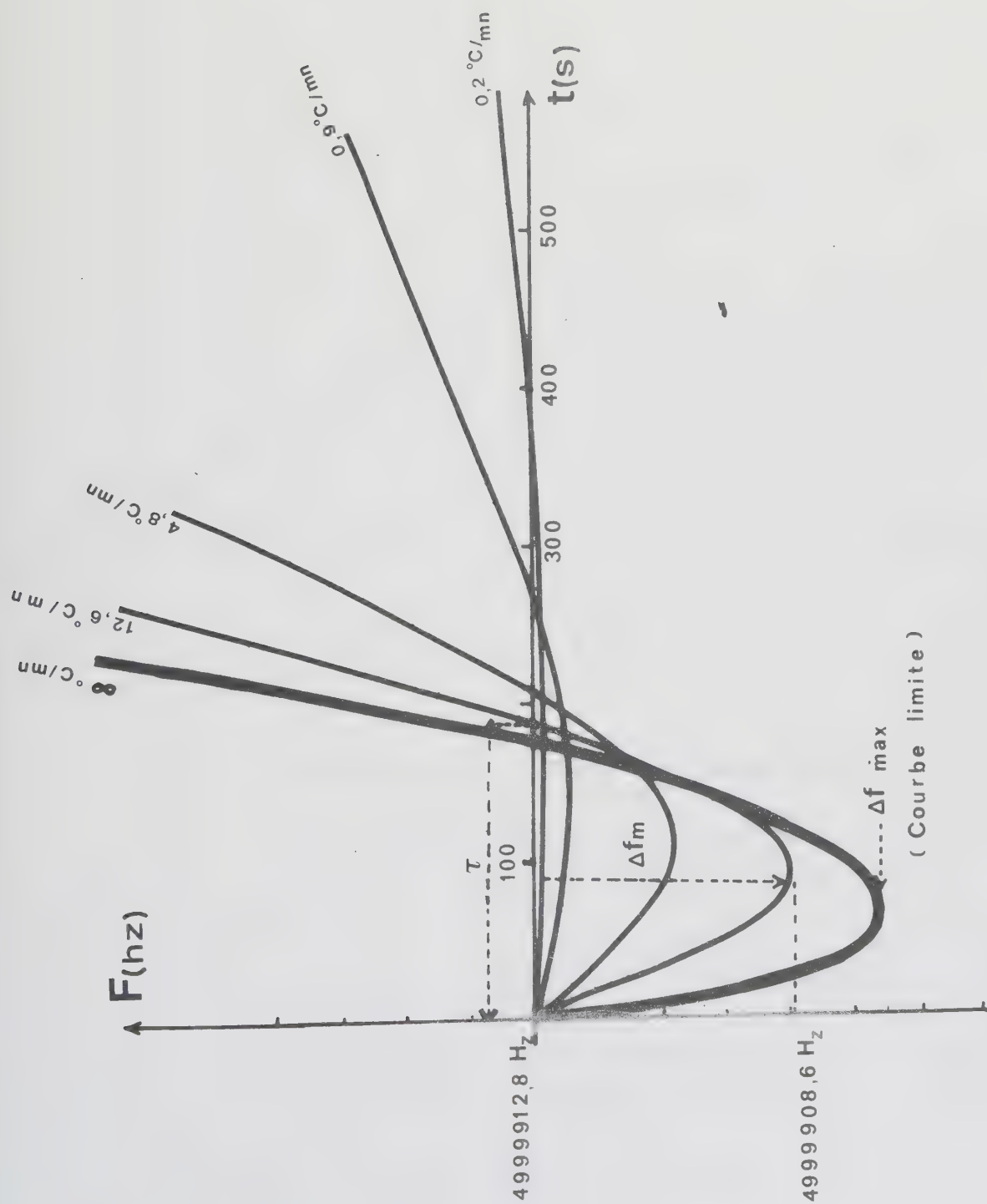


FIG:22 Influence de la vitesse de chauffage sur la reponse en frequence du resonateur

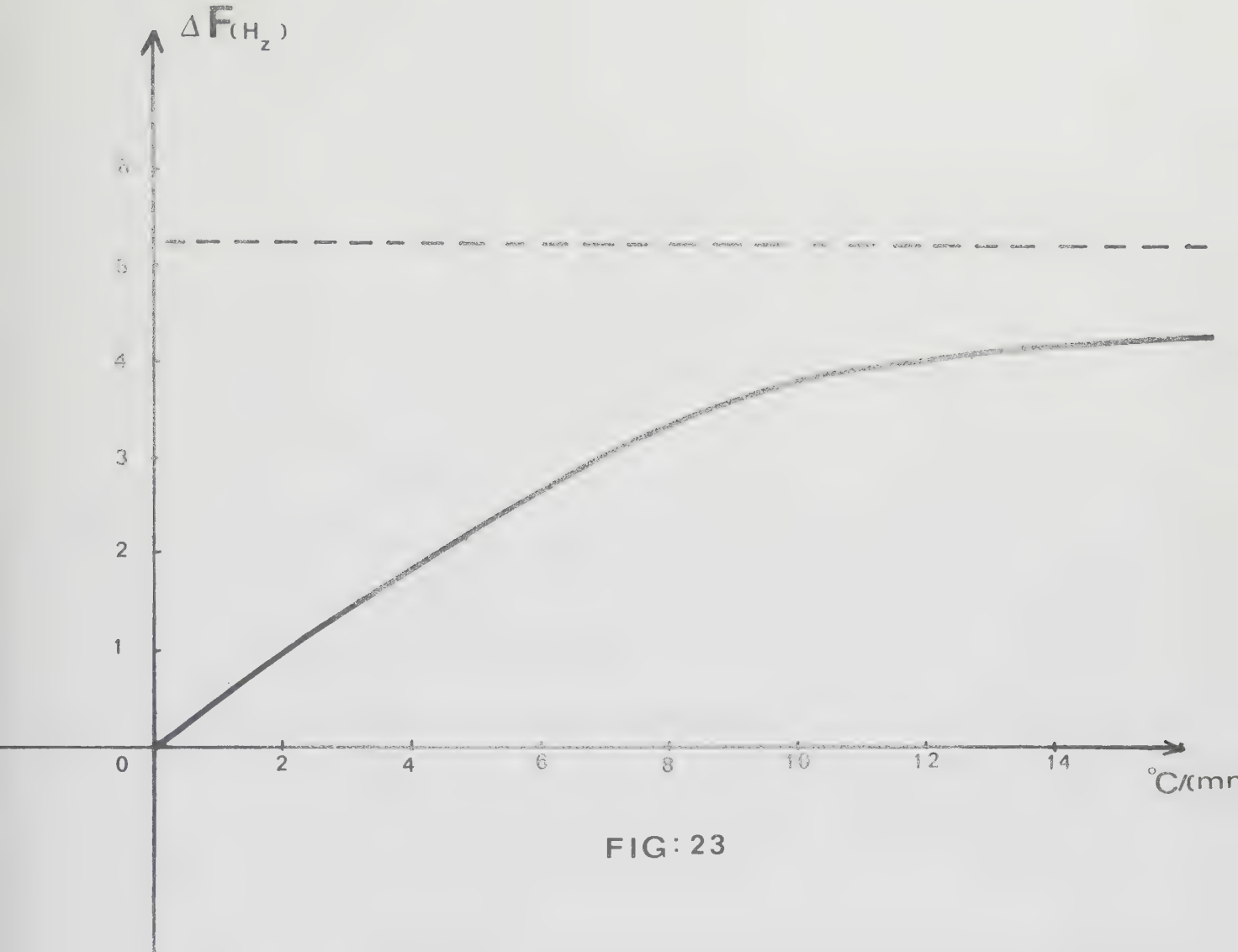


FIG: 23

Amplitude Δf_{∞} de la reponse limite en fonction
de la vitesse de chauffage

Pour une température donnée la valeur Δf_{∞} limite peut être considérée comme une constante du résonateur puisque dans ce cas, vitesse de chauffe et amplitude de l'échelon n'ont plus d'influence.

b) Durée du régime transitoire

Une quantité caractéristique est l'intervalle de temps τ qui sépare l'instant initial de l'instant où la fréquence repasse par une valeur égale à la fréquence initiale (fig.24).

Cet intervalle de temps dépend, comme nous le voyons sur la figure 22 également de la vitesse de chauffage. Sur la figure 25 ont été tracées les variations de τ en fonction de cette dernière.

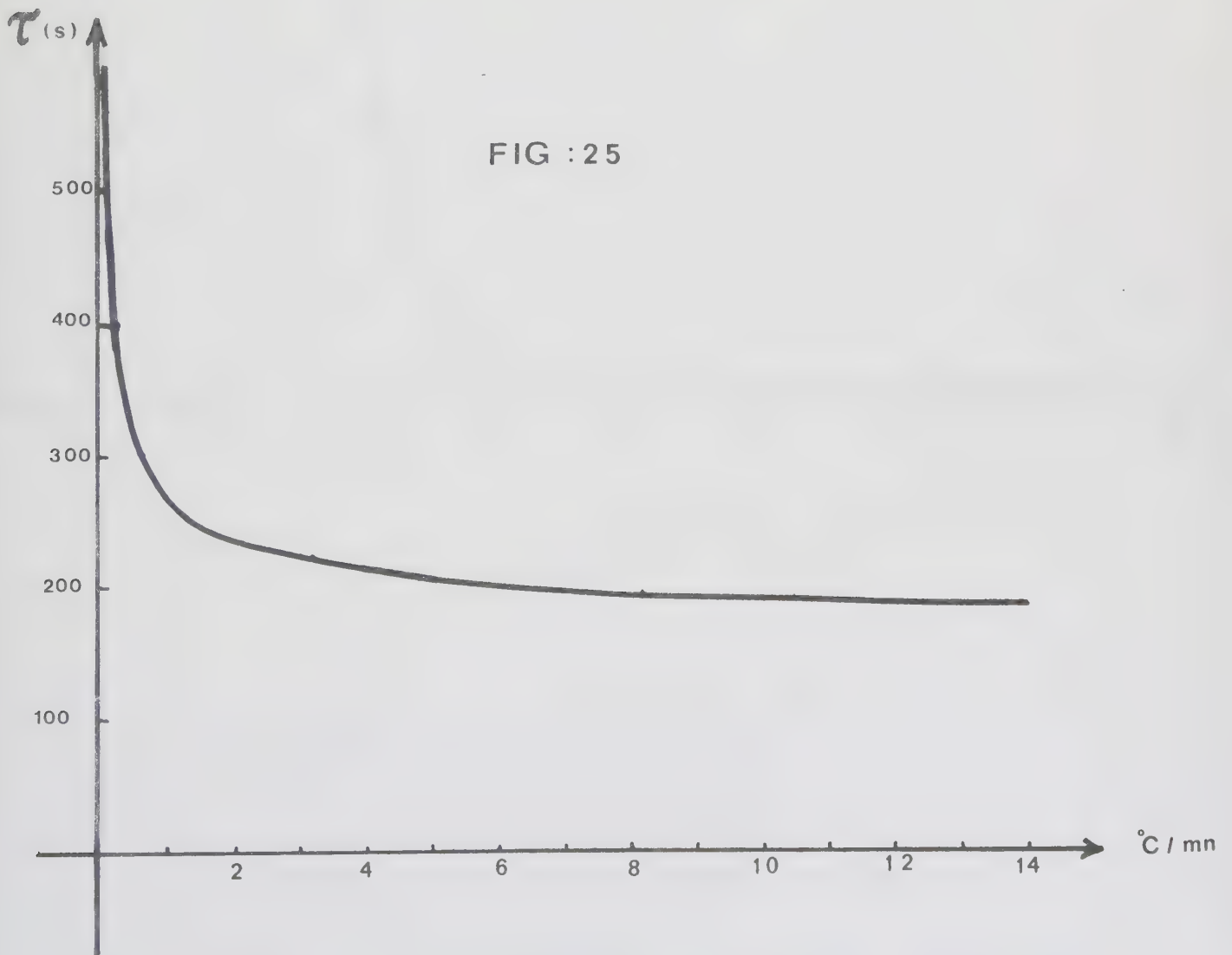
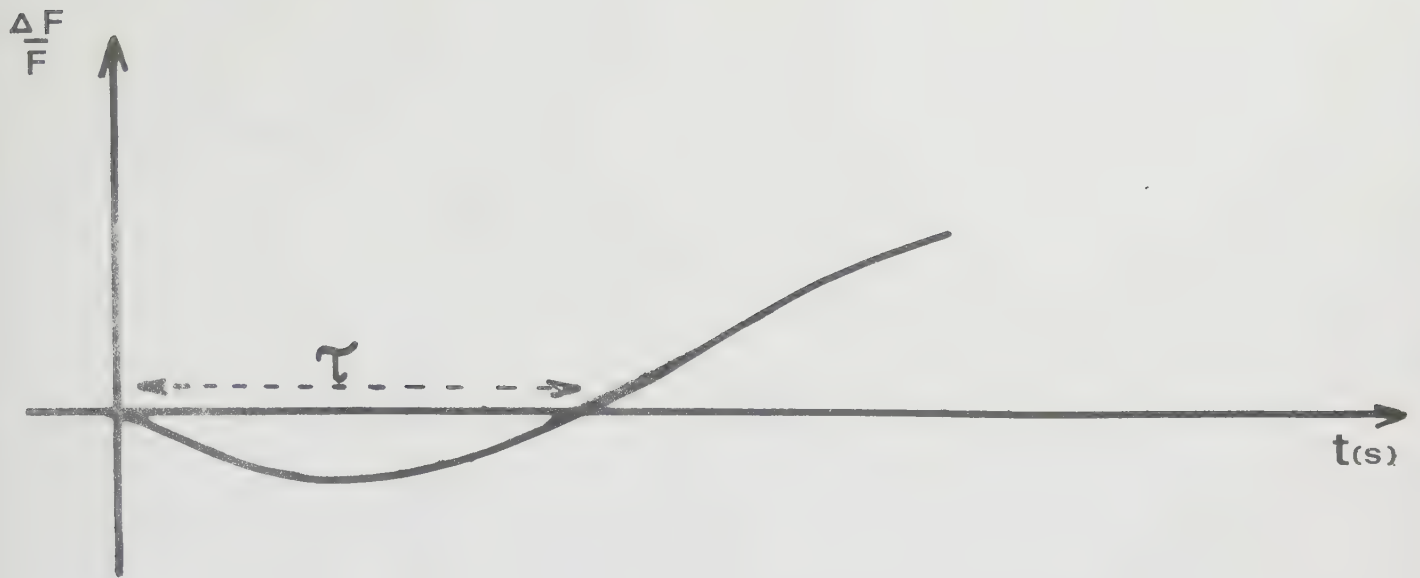
τ peut apparaître comme un temps de réponse.

3) Conclusion

Ces résultats font donc apparaître un lien direct entre le régime transitoire et le gradient de température. De même les grandeurs Δf_{∞} et τ varient dans un sens bien déterminé. Ainsi l'écart négatif de fréquence Δf_{∞} sera d'autant plus important que le gradient de température l'est également. Par contre le temps de réponse τ diminue lorsque le gradient augmente. Δf_{∞} et τ peuvent d'ailleurs être représenté en fonction l'un de l'autre avec la vitesse de chauffe de l'enceinte comme paramètre.

Nous obtenons la figure 26. On voit que cette courbe possède un point limite correspondant aux asymptotes des figures 23 et 25. Ce point limite peut permettre de caractériser le régime transitoire du résonateur considéré.

FIG:24



Variation de τ en fonction de la vitesse de chauffage

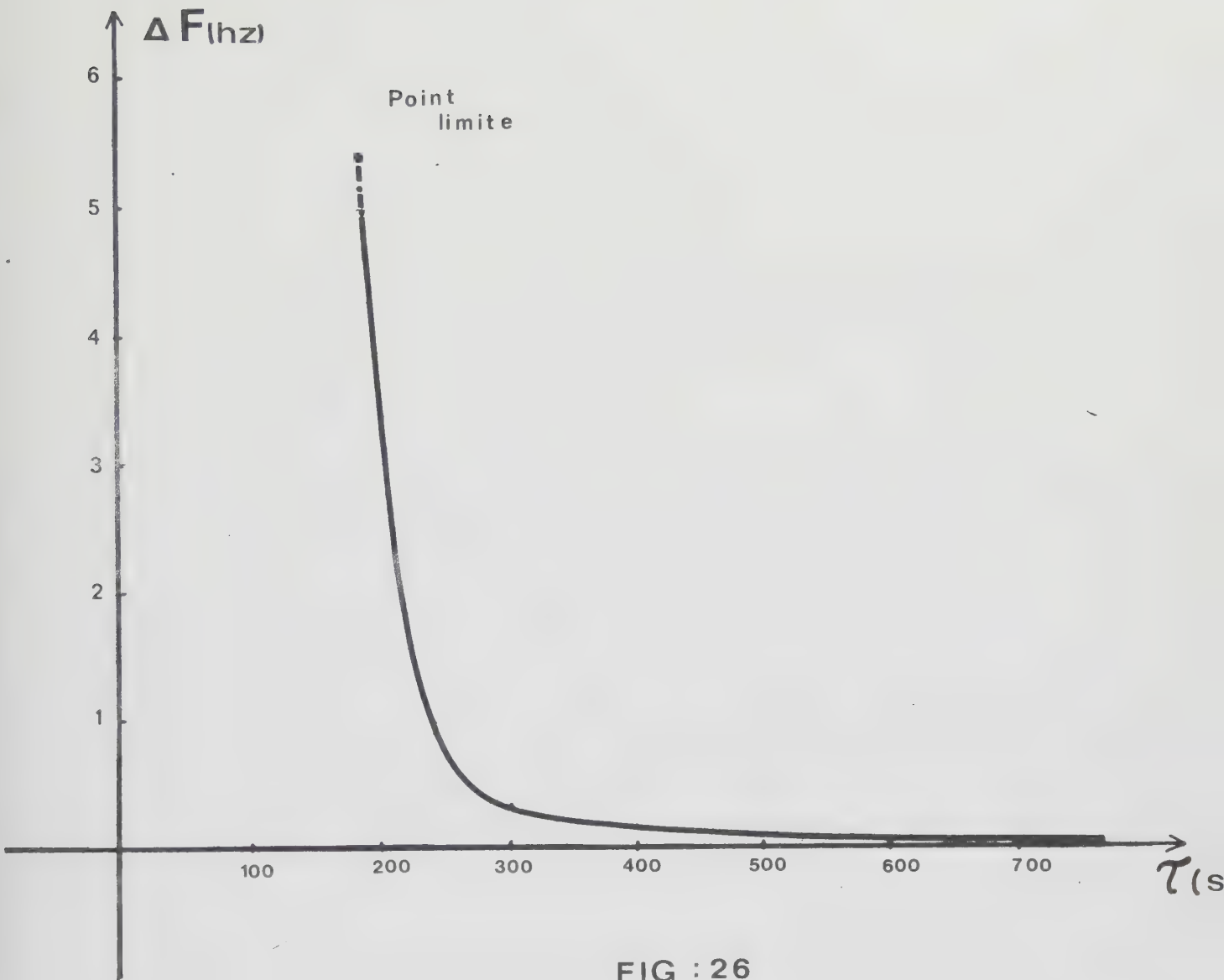


FIG : 26

D - INFLUENCE DES PARAMETRES EXTERIEURS

Les expériences précédentes mettent en évidence le lien direct régime transitoire - gradient de température.

Dans les manipulations qui suivent nous nous sommes efforcés d'examiner l'influence respective de différents paramètres intervenant dans l'amplitude et la durée des régimes transitoires.

C'est surtout une étude comparative. Toutefois toute comparaison nécessite, pour être justifiée, la variation unique d'un seul paramètre. En fait dans l'étude expérimentale entreprise, ce n'est pas toujours le cas ; en effet, coefficients de température, pression du gaz, fixations, soudures diffèrent toujours légèrement. Seuls les ordres de grandeur pourront donc avoir une valeur indicative.

Nous examinerons donc les influences respectives de l'épaisseur du cristal, de la forme des électrodes, de la pression et de la nature du gaz contenu dans l'ampoule.

1) Epaisseur du cristal

Il nous a paru souhaitable d'examiner le cas d'un cristal AT fondamental vibrant également en cisaillement d'épaisseur et toujours muni d'électrodes à bouton central. La diminution de l'épaisseur devrait permettre un régime transitoire écourté dans le temps et atténué en amplitude.

La caractéristique fréquence-température de ce cristal est représentée sur la figure 27.

Nous avons soumis les deux résonateurs : (partiel 5 et fondamental) à un même échelon de température d'amplitude voisine de 5°C et à la vitesse de 8°C/minute.

Les enregistrements sont représentés sur la figure 28. Si nous appelons temps de stabilisation T_s , le temps nécessaire au cristal pour atteindre sa fréquence finale (donnée par la caractéristique statique), nous notons une diminution très sensible en faveur du fondamental (200 s contre 600 s).

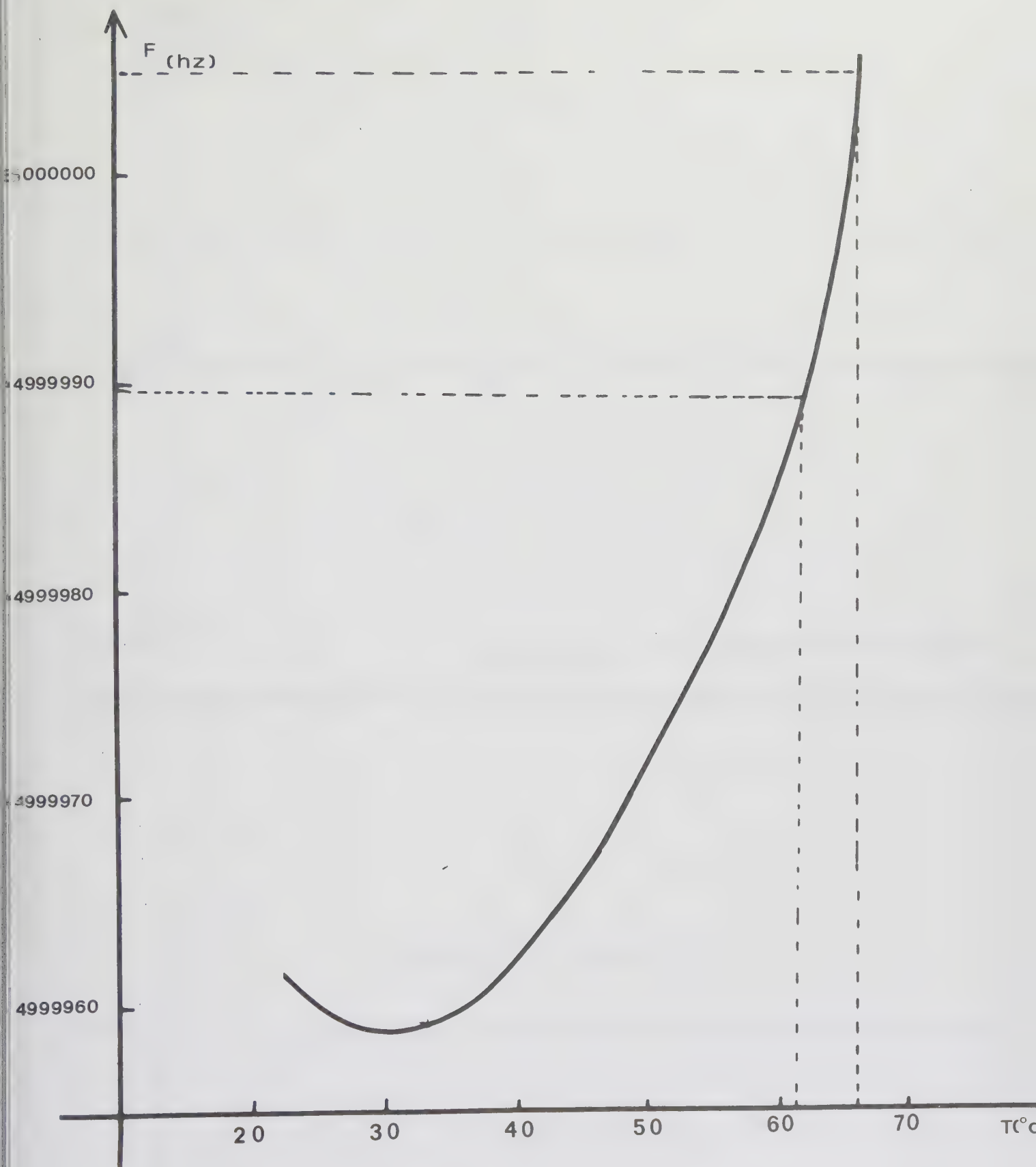


FIG: 27

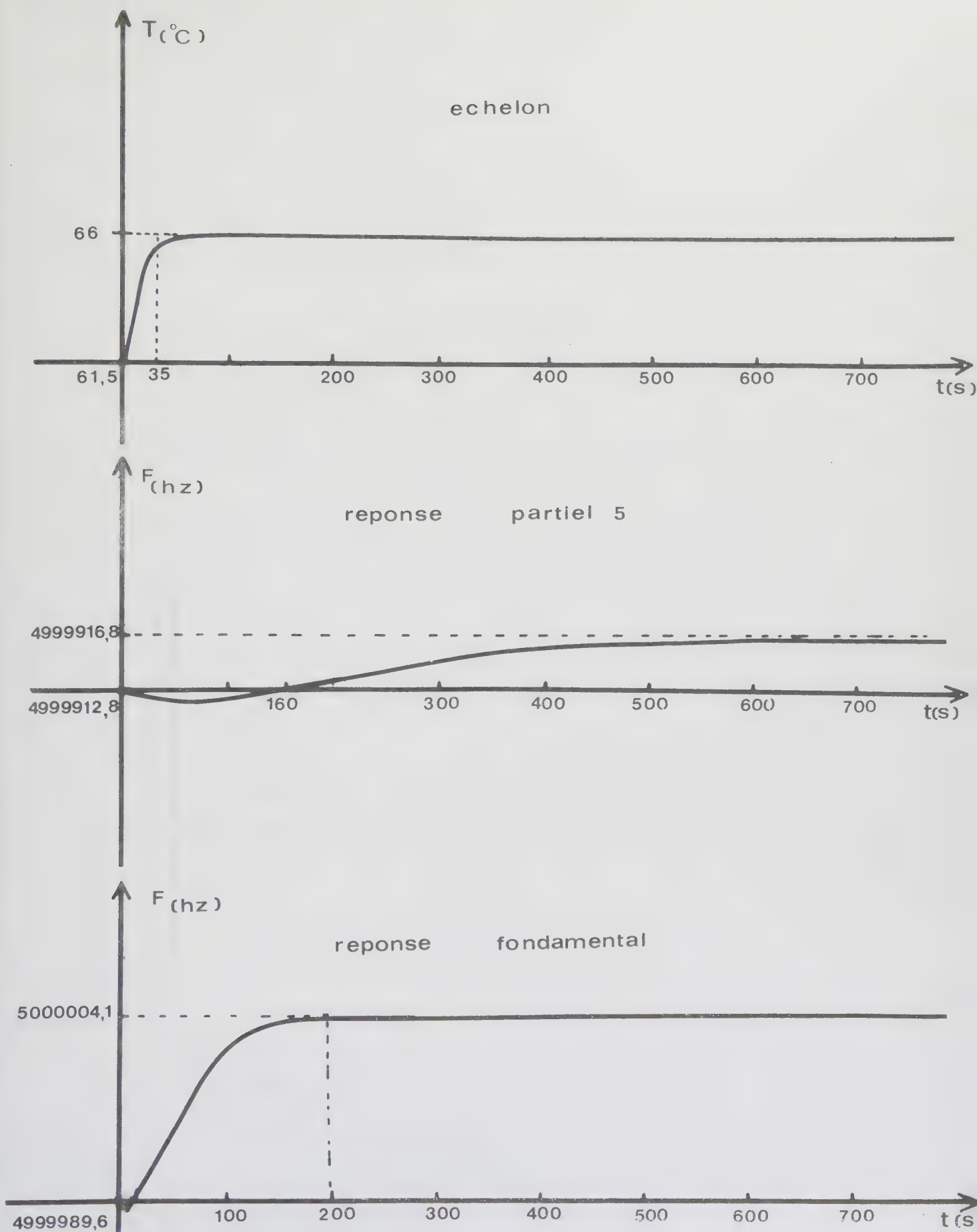


FIG: 28

Amplitude et temps de réponse du régime transitoire

Nous avons réalisé à nouveau des échelons de température d'amplitude croissante comme dans le cas de la figure 21. Nous obtenons rapidement la valeur asymptotique (fig.29). En effet pour $\Delta T > 5^{\circ}\text{C}$, $\Delta f = \Delta f_m \approx 1 \text{ Hz}$. Dans le cas du cristal partiel 5 nous avons $\Delta f = \Delta f_m = 3,7 \text{ Hz}$ pour $\Delta T > 15^{\circ}\text{C}$.

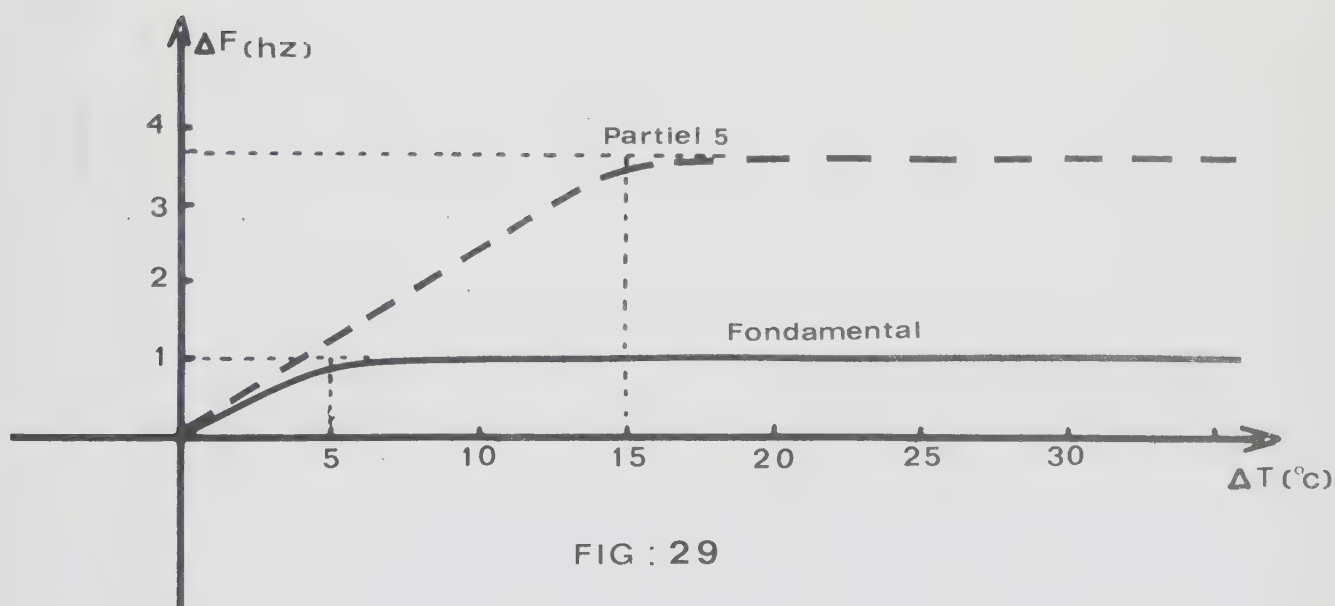
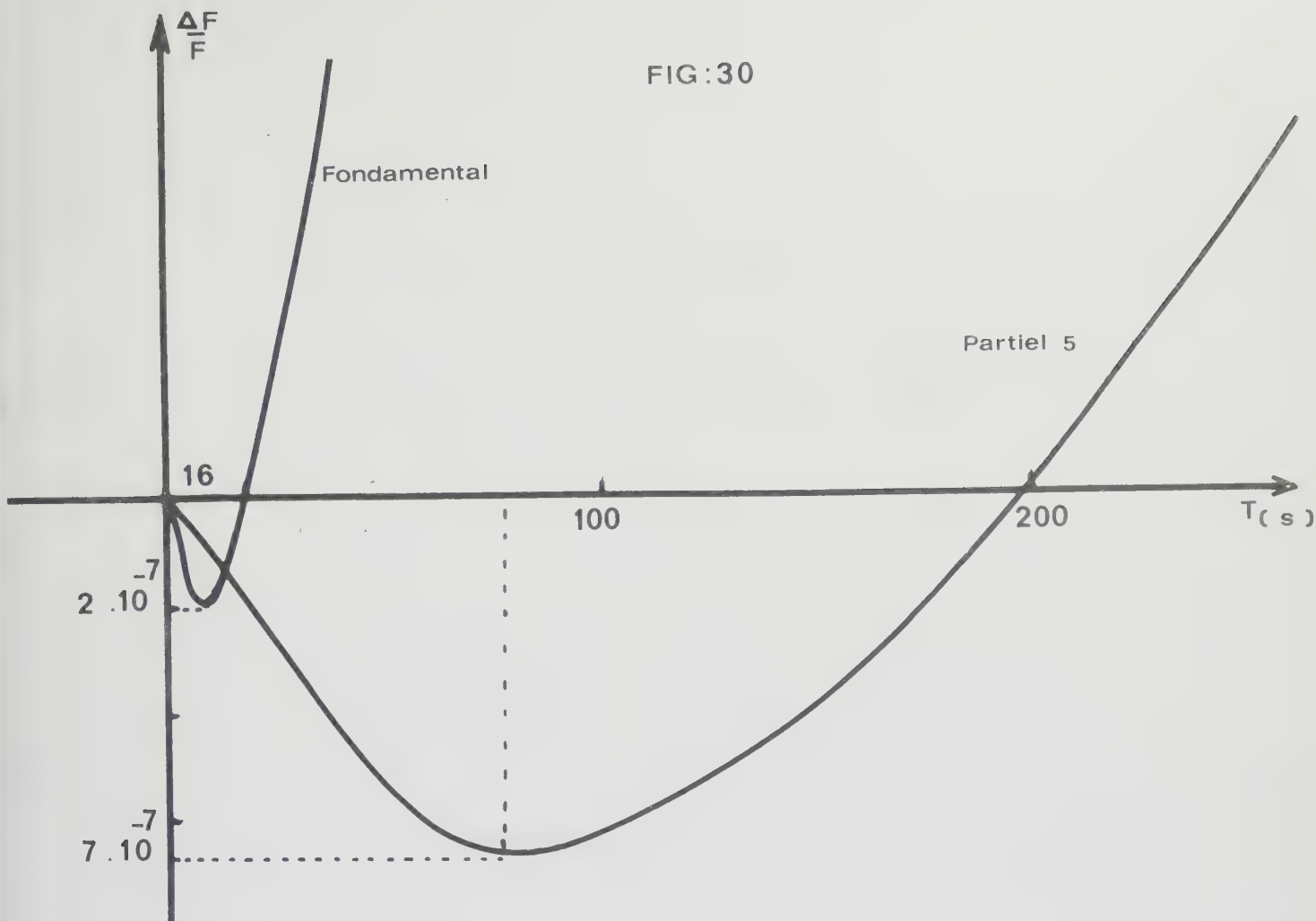


FIG : 29

Dans le cas d'une vitesse de chauffage constante (8°C mn) nous avons obtenu la courbe limite $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$ représentée ci-dessous. Dans un souci de simplification c'est la valeur $\frac{\Delta f}{f}$ qui figure en ordonnée. A titre comparatif nous avons porté sur le même croquis le régime transitoire du résonateur partiel 5, enregistré dans les mêmes conditions (fig.30)



Nous observons donc également une très nette diminution de la durée τ du régime transitoire (16 s contre 200 s). En amplitude la valeur $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$ est atténuée dans un rapport 3,5.

Pour des vitesses de chauffage différentes nous retrouvons le même comportement que pour le cristal partiel 5 mais à une échelle plus réduite. Les grandeurs $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$ et τ semblent liées par une loi semblable à celle représentée précédemment sur la figure 26. Le point limite est alors défini par les paramètres $(\frac{\Delta f}{f} \approx 0,3 \cdot 10^{-6}, \tau \approx 12 \text{ s})$. Par comparaison le résonateur partiel 5 est défini par les valeurs $(\frac{\Delta f}{f} = 10^{-6}, \tau = 200 \text{ s})$.

L'épaisseur du cristal joue donc un rôle très important dans l'amplitude et la durée du régime transitoire. Dans le cas d'oscillateurs perturbés en température les résonateurs de faible épaisseur (vibrant sur le fondamental) seront susceptibles d'atteindre plus rapidement leur fréquence d'équilibre.

2) Influence de la forme des électrodes

C'est sur différents résonateurs fondamentaux d'angle de coupe voisin que nous avons essayé d'examiner l'influence des électrodes.

Nous avons étudié quatre formes d'électrodes (fig.31) :

- électrodes à bouton central
- électrodes rectangulaires
- électrodes en Z
- électrodes annulaires

Tous ces résonateurs sont montés dans le même type d'ampoule. La pression diffère peu d'un quartz à l'autre (10^{-3} Torr).

a) Temps de stabilisation

Pour tous ces résonateurs, le temps de stabilisation relevé après un même choc de température (5°C ; 8°C/mn) est voisin de 200 secondes.

b) Amplitude et temps de réponse

L'enregistrement de la courbe limite réalisé de la même façon que précédemment (chauffage continu 8°C/mn) pour tous ces résonateurs nous indique les valeurs suivantes :

- Pour le résonateur muni d'électrodes à bouton central :

$$\tau = 16\text{s}; \frac{\Delta f_{\infty}}{f} = 2 \cdot 10^{-7}$$

- Pour le résonateur muni d'électrodes rectangulaires :

$$\tau = 17\text{s}; \frac{\Delta f_{\infty}}{f} = 1,6 \cdot 10^{-7}$$

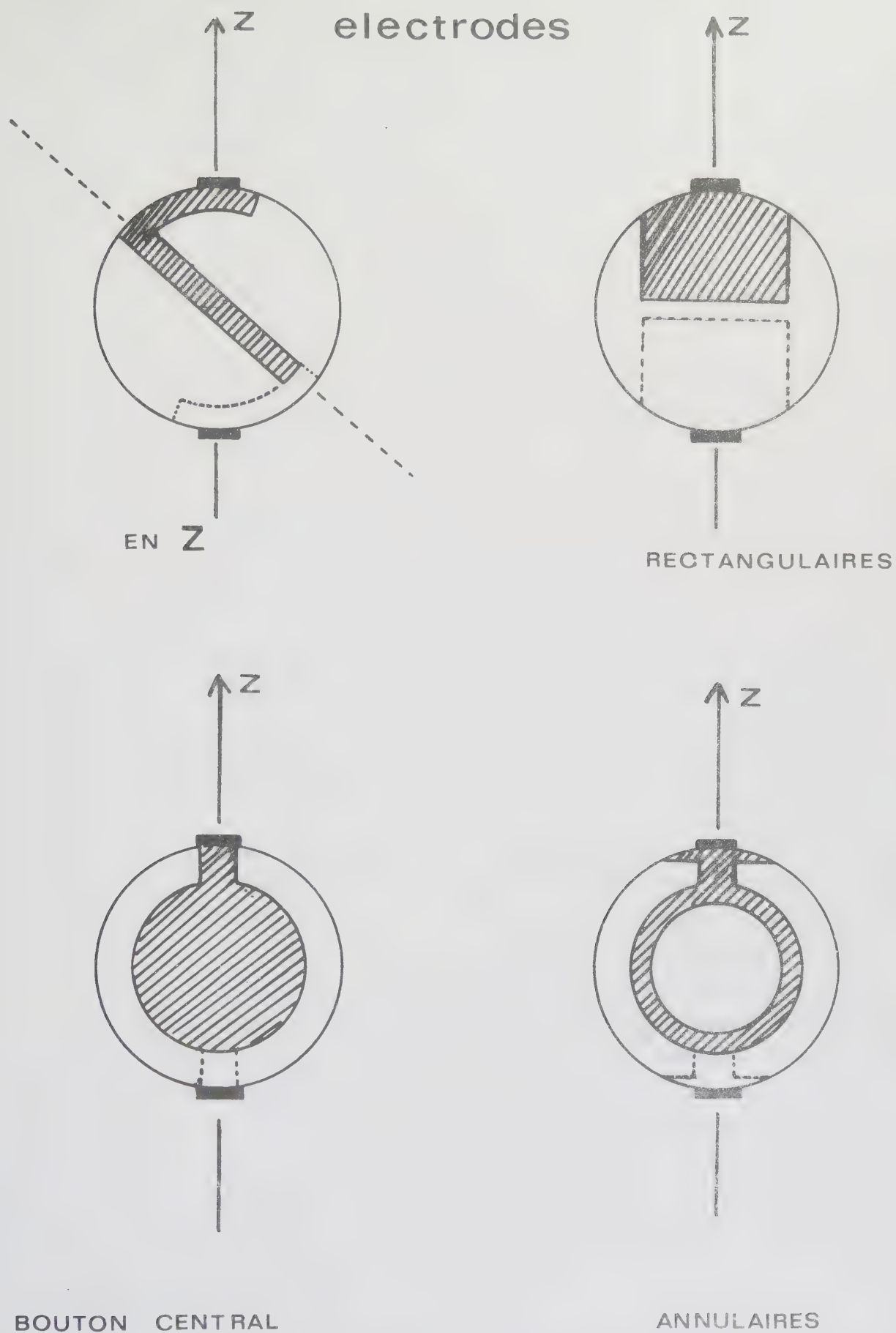


Fig: 31

- Pour le résonateur muni d'électrodes en Z

$$\tau = 28 \text{ s}; \frac{\Delta f_{\infty}}{f} = 1,4 \cdot 10^{-7}$$

Pour le quartz a électrodes annulaires, c'est d'un fondamental 2 MHz qu'il s'agit. Il ne nous a pas été possible de faire osciller dans des conditions suffisantes de stabilité un cristal 5 MHz muni d'électrodes de ce type; toutefois l'amplitude étant mesurée relativement à la fréquence ($\frac{\Delta f}{f}$) le résultat doit cependant pouvoir être comparé.

Nous trouvons :

$$\tau = 46 \text{ s}; \frac{\Delta f}{f} = 1,3 \cdot 10^{-7}.$$

Ces régimes transitoires sont d'ailleurs représentés sur la figure 32.

c) Interprétation

D'après ces mesures il semble bien que l'élément prépondérant dans l'influence des électrodes soit non pas la forme, mais l'importance de la surface métallisée. Elles jouent en effet un rôle dans la conduction de la chaleur. Ainsi les régimes transitoires correspondant aux électrodes à bouton central et rectangulaires, apparaissent relativement identiques. Nous avons en effet des surfaces d'électrodes de valeur voisine et relativement importante. L'amplitude est importante, le temps de réponse faible. Par contre les électrodes de faible surface atténuent l'amplitude de la variation de fréquence, mais augmentent également le temps de réponse. Ceci est particulièrement visible pour les électrodes en Z et annulaires.

Pour la réalisation de capteurs de température, la valeur importante de ces deux paramètres constitue un grave défaut.

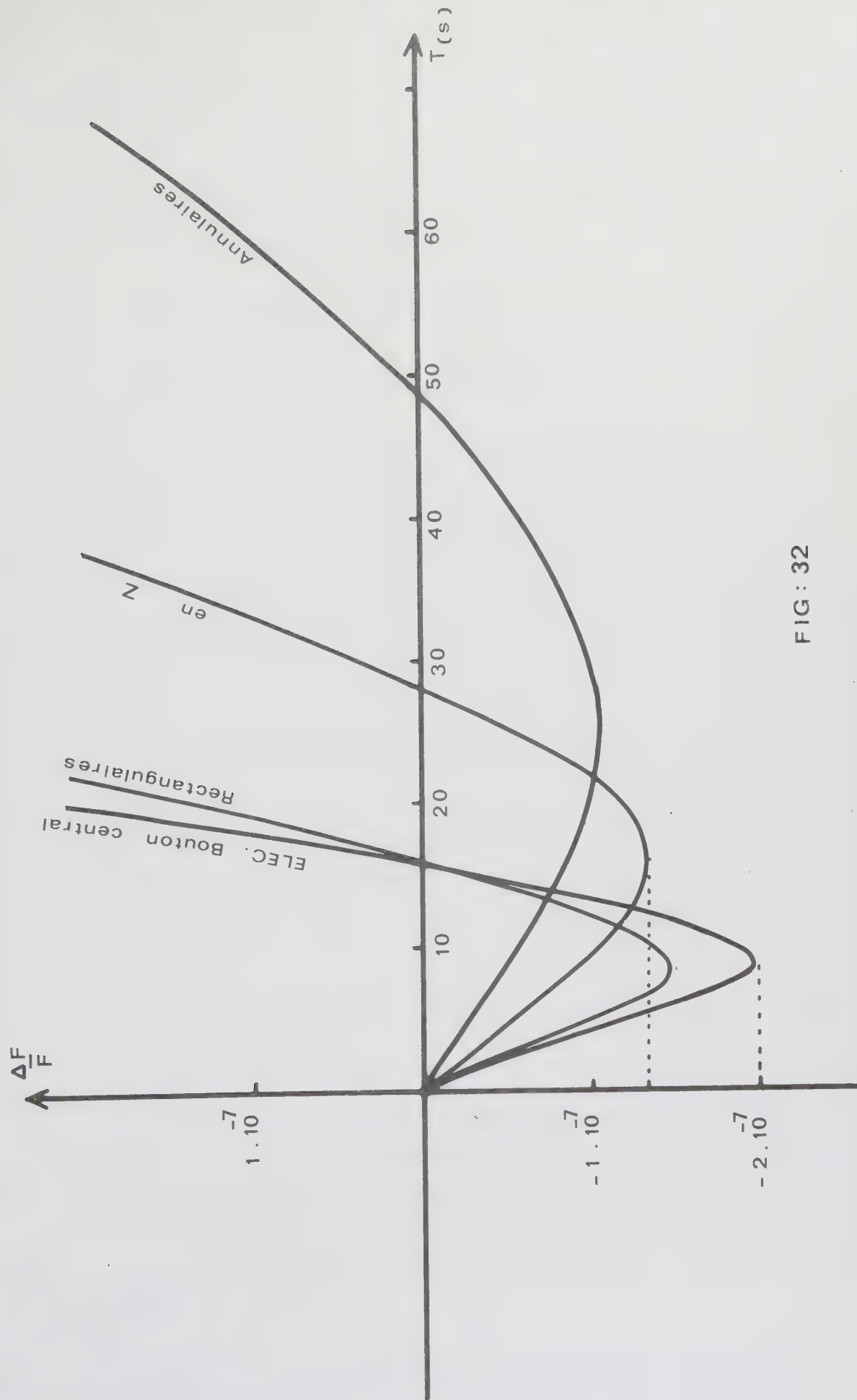


FIG : 32

En effet un temps de réponse long limite la fréquence de mesures successives.

Une variation négative de fréquence importante introduit un déphasage entre la lecture du capteur et l'allure réelle de la variation de température.

En effet, dans un premier temps la fréquence diminue alors que la température croît. Le capteur donne donc une fausse indication.

Dans les manipulations qui suivent nous allons nous efforcer de déterminer l'influence du milieu gazeux de l'ampoule.

3) Influence de la nature et de la pression du gaz

Le gradient thermique à l'intérieur de la plaque de quartz dépend de la vitesse de propagation de la température. Nous pensons donc que la pression et la nature du gaz utilisé peut dans une certaine mesure influencer sur le régime transitoire du résonateur.

Dans un premier temps nous utiliserons l'hélium à différentes pressions.

Par la suite nous utiliserons différents gaz à pression constante. Pour des raisons pratiques et afin d'avoir la meilleure stabilité possible, nous avons été conduit à utiliser un quartz fondamental à électrodes en Z. Toutefois les résultats obtenus restent proportionnellement valables avec les autres résonateurs de coupe AT.

Une pression importante doit favoriser l'apparition de courants de convection et donc une augmentation du gradient de température.

Par contre pour des pressions relativement faibles l'influence des électrodes sera prépondérante.

Pour mettre en évidence ces hypothèses, nous avons réalisé le dispositif expérimental de la figure 33. Il a été ajouté à l'ensemble du dispositif utilisé précédemment, et permet d'obtenir un vide primaire à 10^{-1} Torr.

a) Hélium à différentes pressions

Déplacement de la caractéristique fréquence-température

Pour toutes les mesures effectuées à des pressions différentes, nous observons tout d'abord une translation de la courbe fréquence-température (fig.34). Ainsi à la température de $61,5^{\circ}\text{C}$ nous observons une loi de variation de la fréquence de résonance en fonction de la pression $f(p)$ qui nous est donnée par la figure 35.

Pour des pressions supérieures à 300 Torr la caractéristique semble se stabiliser de manière asymptotique. La température du point d'inversion reste toutefois constante.

Régime transitoire

Nous avons également enregistré l'ensemble des régimes transitoires correspondant à ces différentes pressions. Nous ne nous intéressons ici qu'aux valeurs $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$ et τ . Tous ces enregistrements ont été rapporté à la même origine par souci de clarification. Nous obtenons une famille de courbe représentée ci-dessous (fig.36). Le paramètre est ici la pression P de l'hélium contenu dans l'ampoule. La vitesse de chauffage constante de l'enceinte est fixée à $8^{\circ}\text{C}/\text{min}$.

dispositif experimental

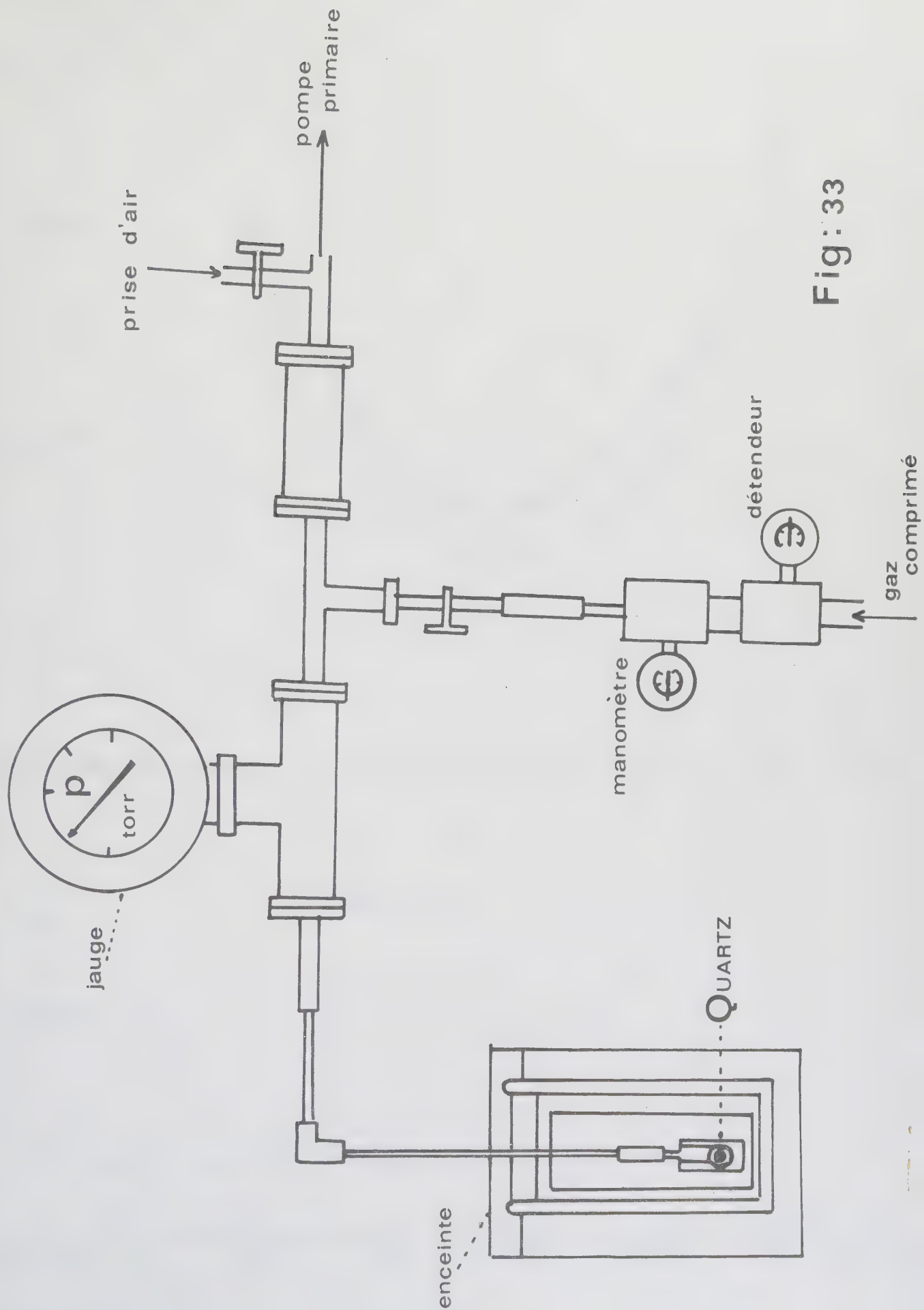


Fig: 33

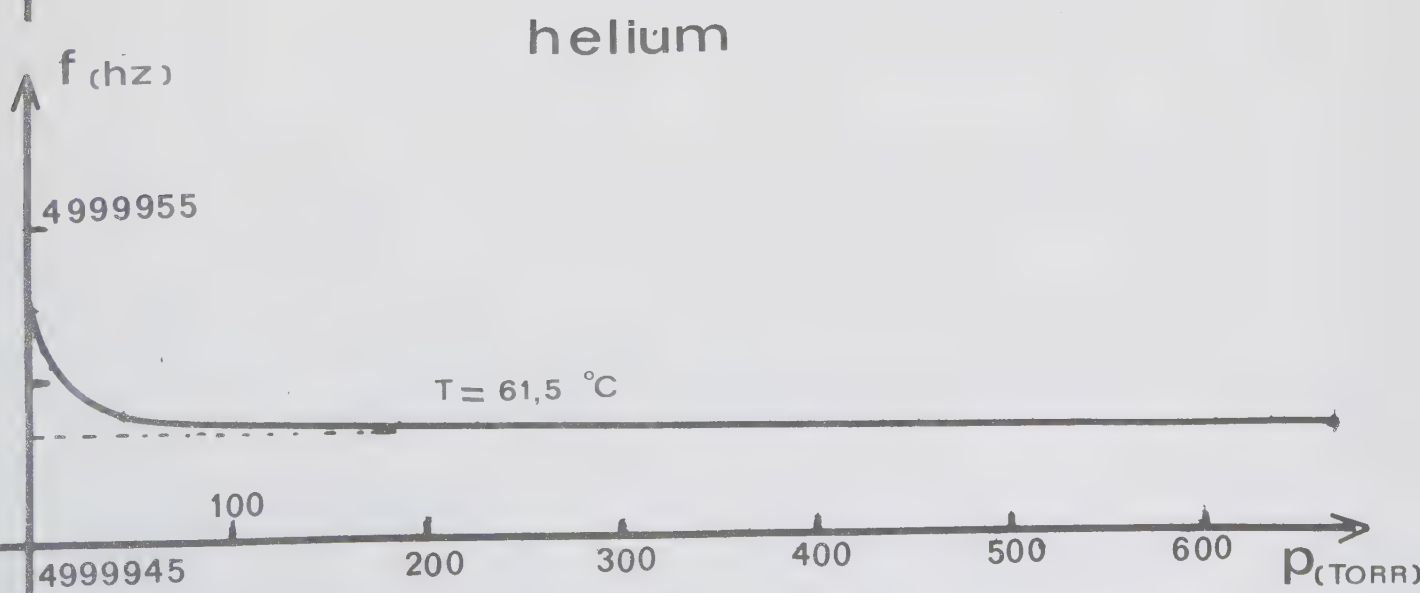
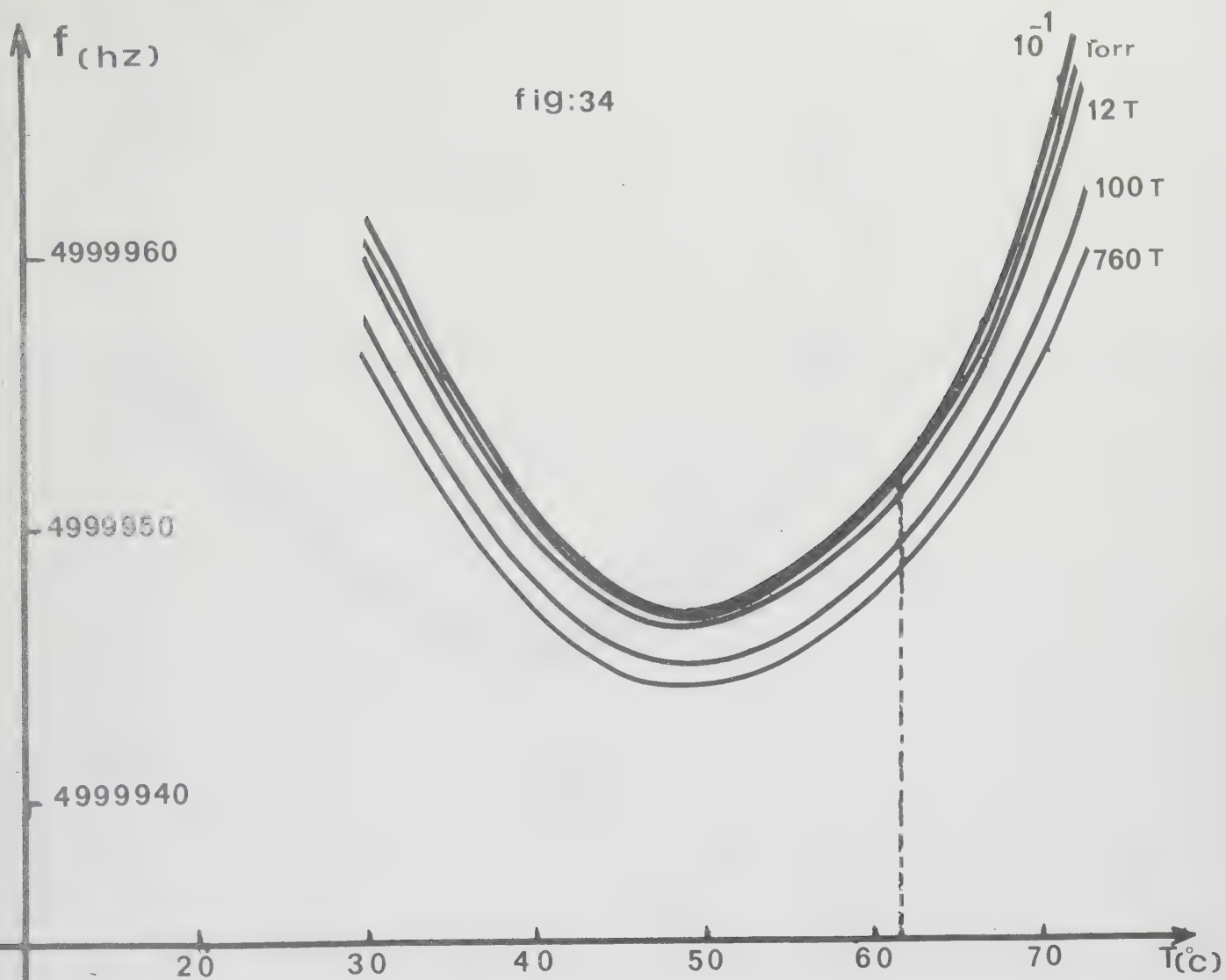


fig:35

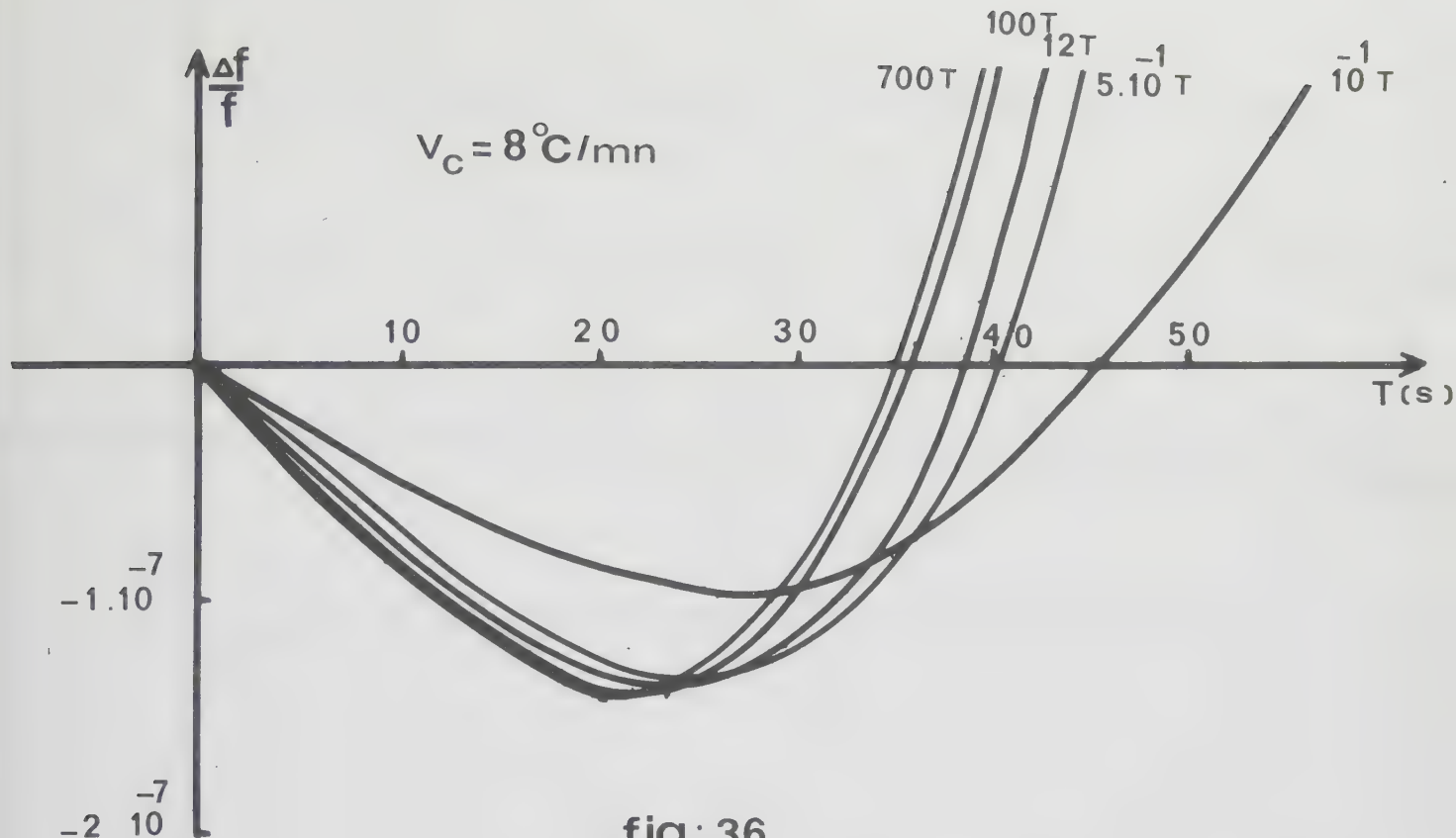


fig: 36

Nous pouvons en déduire les variations $\frac{\Delta f}{f}$ et τ en fonction de la pression. Elles sont représentées sur la figure 37. Nous retrouvons là une analogie pression-vitesse de chauffage mais avec dans ce cas existence de deux points limites M_1 et M_2 que nous mettons facilement en évidence par élimination du paramètre pression (fig.38).

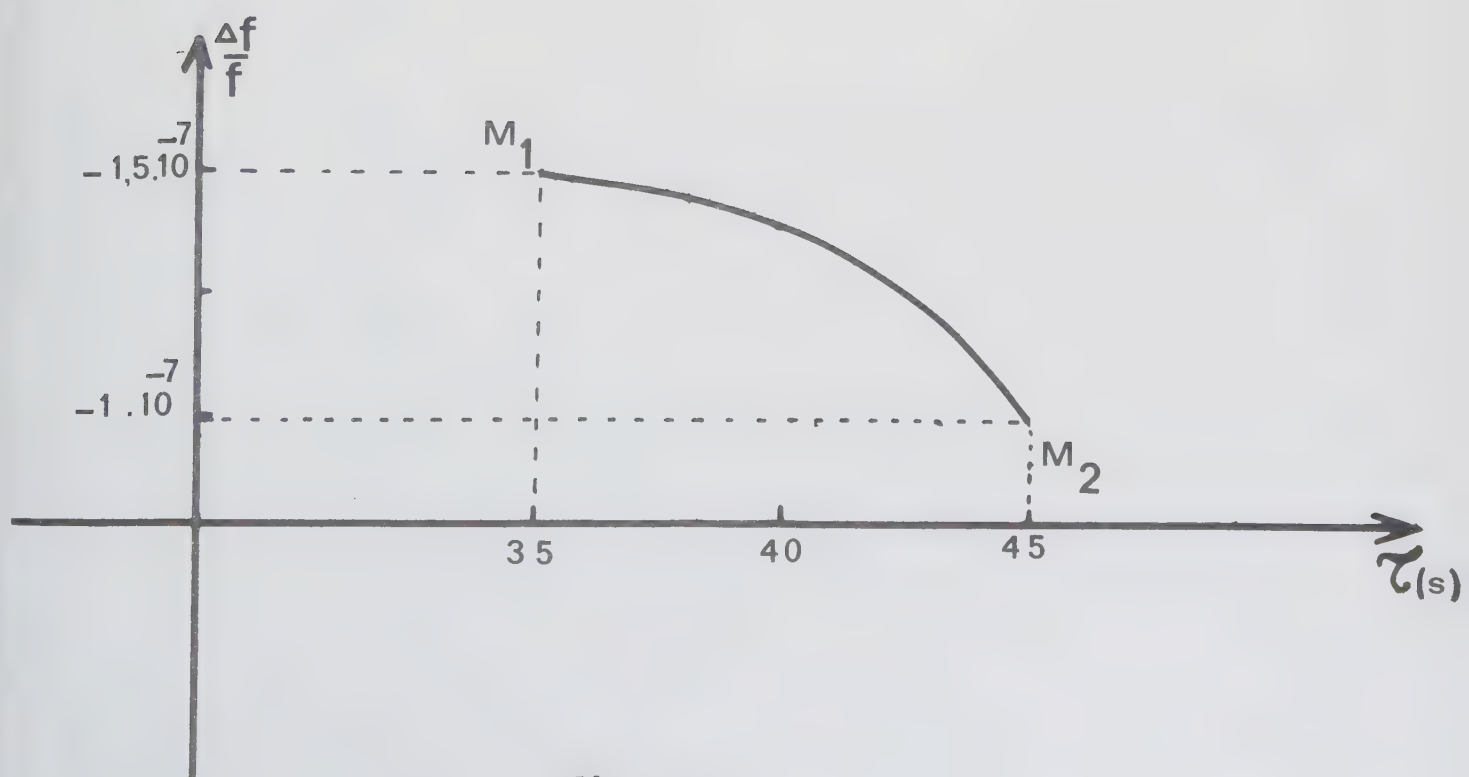
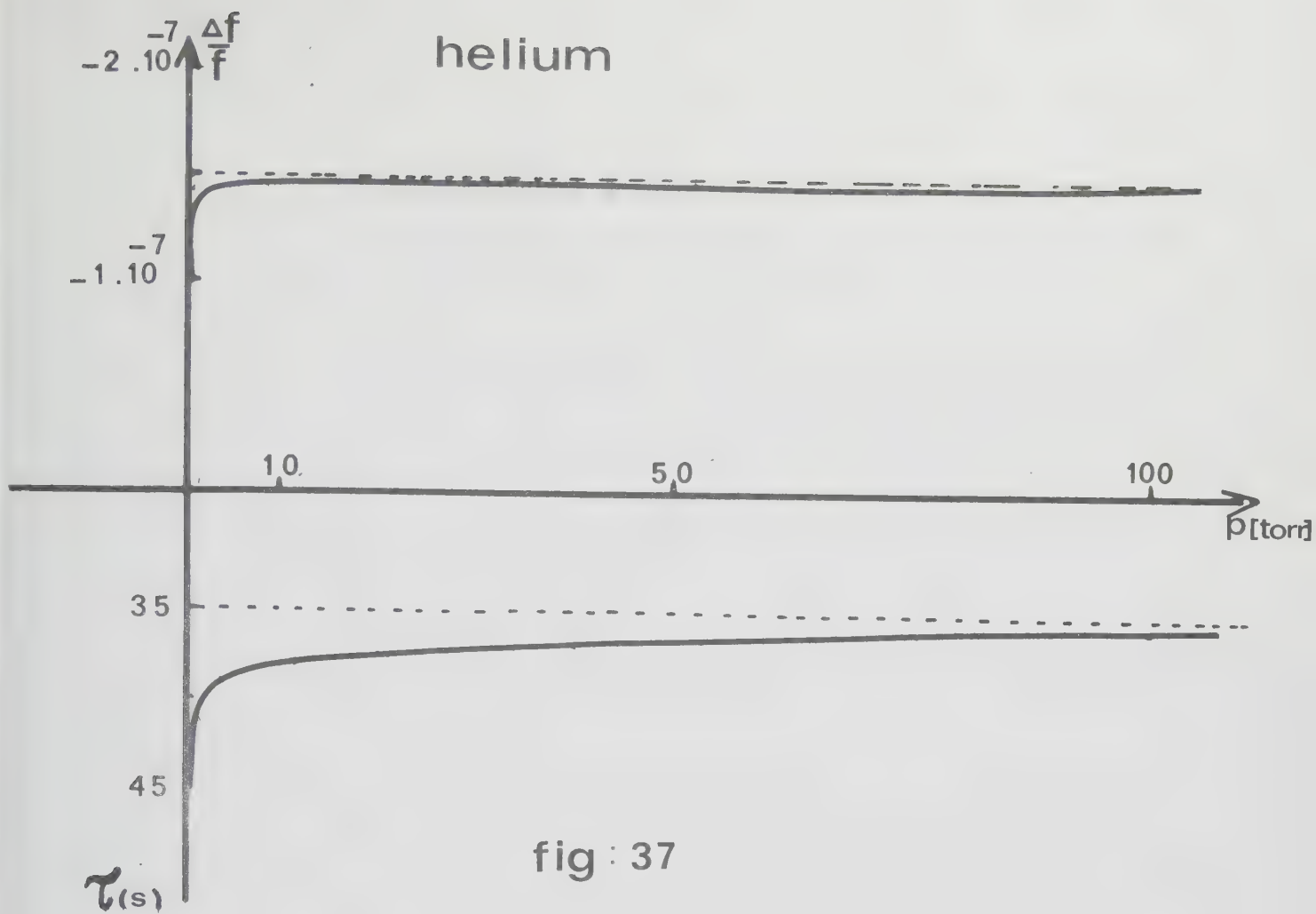
Le point M_1 indique un phénomène de saturation du régime transitoire, la pression ayant alors une influence maximale.

Au contraire le point M_2 matérialise la valeur de la pression du gaz pour laquelle, l'influence du milieu gazeux est négligeable devant celle des électrodes (10^{-1} à 10^{-2} Torr).

b) Autres gaz

Air

Dans le cas de l'air, si nous répétons ces mêmes mesures, la



saturation est déjà obtenue pour une pression voisine de 10^{-1} Torr. Les régimes transitoires sont donc pratiquement identiques pour des pressions variant de 10^{-1} à 760 Torr.

L'augmentation du temps de réponse τ et la diminution sensible de $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$ nous indique que l'air ne favorise pas l'apparition d'un gradient thermique important.

L'obtention de courbes identiques à celles obtenues avec l'hélium nécessite des pressions beaucoup plus faibles.

La figure 39 nous montre le régime transitoire du résonateur dans l'air et sous les pressions de 10^{-1} et 760 Torr.

Elle indique également le déplacement de la caractéristique fréquence-température obtenue dans les mêmes conditions que pour l'hélium. C'est donc aussi pour des pressions relativement faibles que le déplacement est le plus sensible.

Azote

Dans le cas de l'azote, nous obtenons une amplitude relativement importante du régime transitoire et la saturation intervient dès la pression de 10^{-1} Torr.

Argon

Pour l'Argon, c'est pour une pression égale à 200 T que nous obtenons la saturation.

Contrairement aux gaz précédents, l'amplitude $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$ obtenue à la pression de 760 Torr est inférieure à celle relevée pour 10^{-1} Torr.

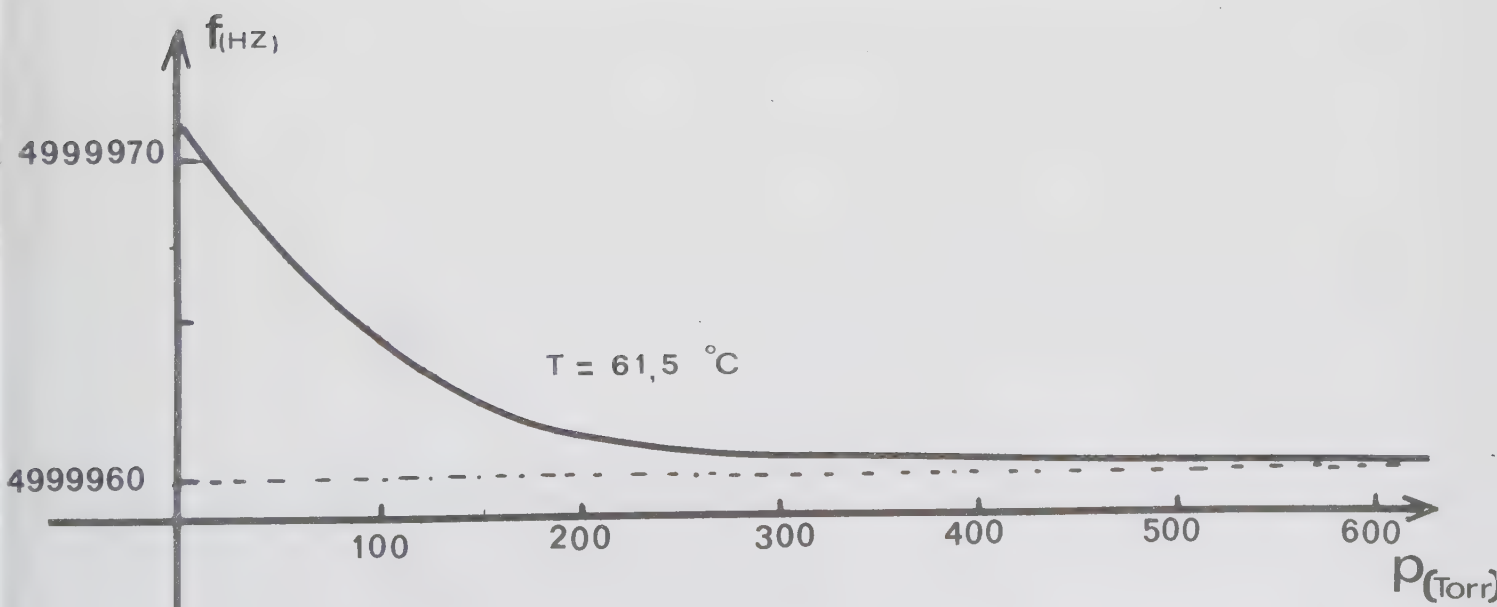
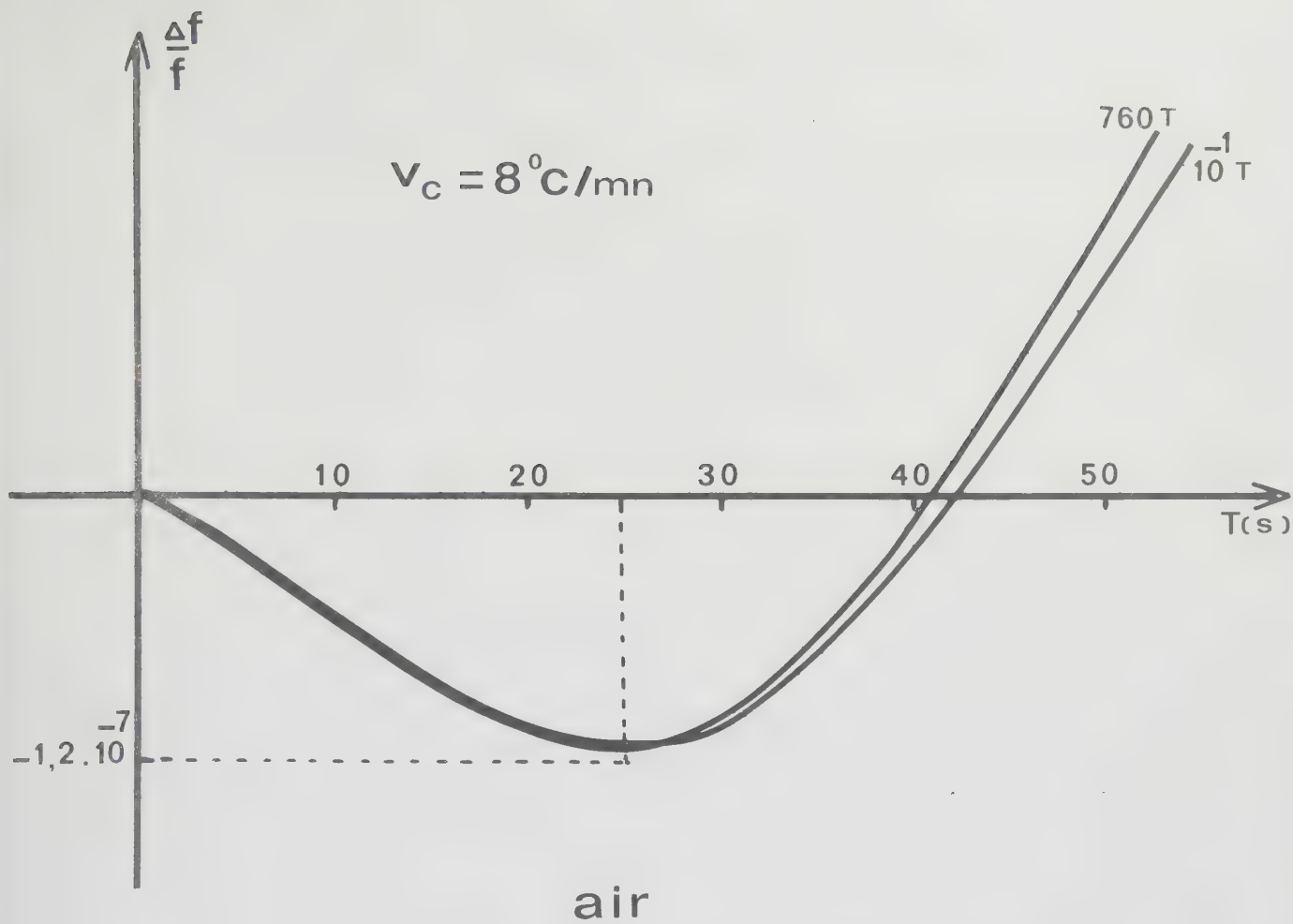


fig : 39

3) Influence de la nature du gaz à la pression atmosphérique

Nous avons représenté sur la figure 40 tous les régimes transitoires du résonateur pour ces différents gaz. Ils correspondent à une pression de 760 Torr et à une vitesse de chauffage continue de 1°/minute.

Nous avons d'ailleurs mesuré les temps de stabilisation du résonateur en atmosphère d'azote, puis d'air à 760 Torr.

L'échelon de température réalisé est de 5°C et la vitesse de chauffage de 8°C/minute.

Nous avons obtenu une stabilité de $2 \cdot 10^{-9}$ (sur 15 minutes) après un laps de temps T_s de 200 s pour l'azote et 280 s pour l'air.

Pour l'hélium à 760 Torr et à 10^{-1} Torr nous obtenons un temps de stabilisation qui varie dans le même rapport 240 s et 300 s.

L'utilisation de gaz sous pression peut donc dans une certaine mesure contribuer à abaisser le temps de mise en route des oscillateurs. Mais de la même façon ils seront beaucoup plus sensibles aux variations de température.

Pour la mise au point de capteurs de température, nous travaillerons plutôt avec la pression la plus basse et avec des électrodes de très faibles surfaces.

E - RECHERCHE D'UNE FORME NOUVELLE D'ELECTRODES

1) Rôle et réalisation des électrodes

a) Définition

Pour un quartz AT vibrant en cisaillement d'épaisseur, l'excitation doit être apportée par un champ périodique appliqué en Y.

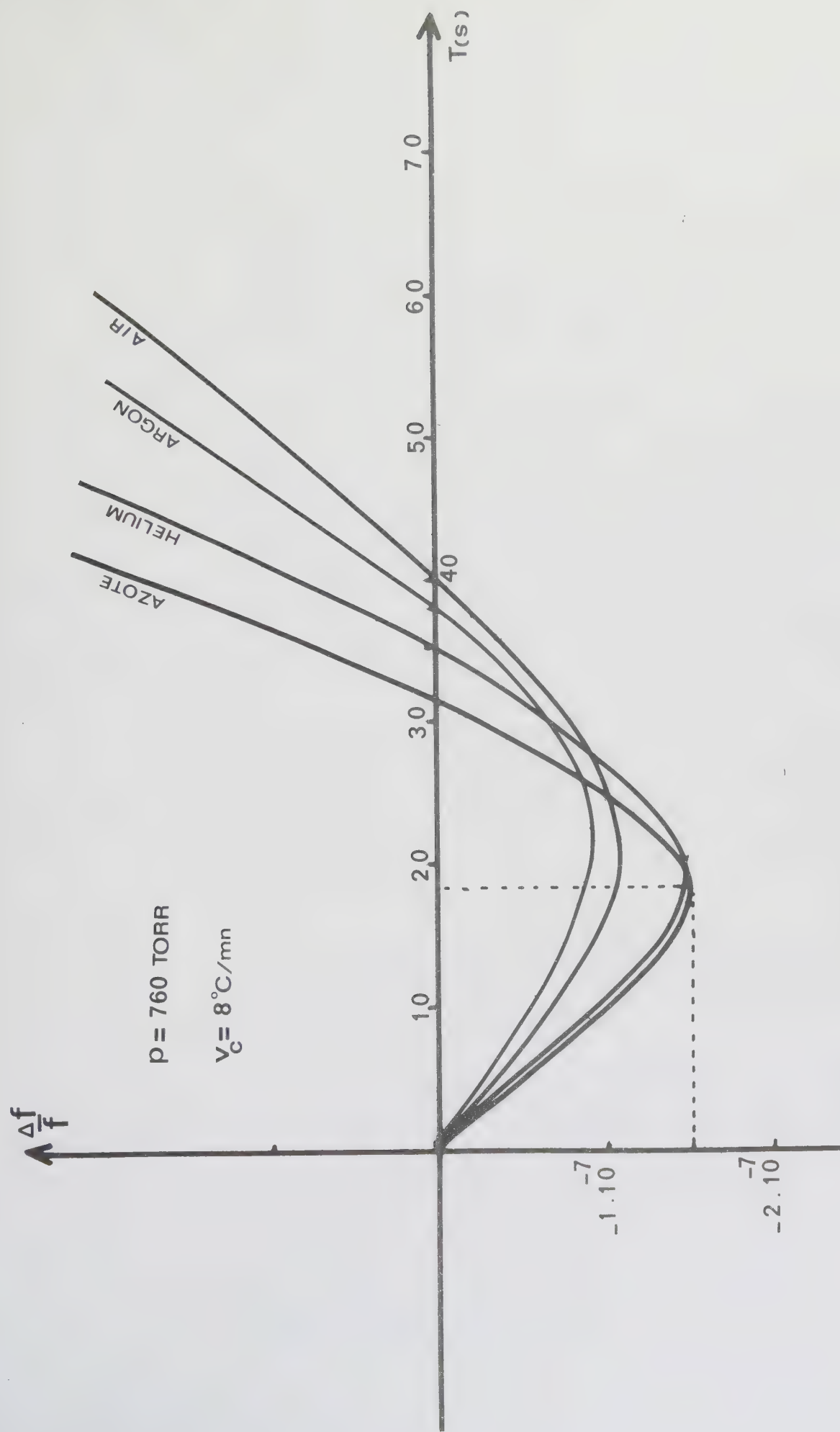


fig : 40

Ce champ électrique peut être obtenu entre les deux armatures d'un condensateur plan ; c'est le cas pour un cristal excité en "lame d'air". Il peut également, dans la plupart des cas être obtenu par métallisation sur ses surfaces d'électrodes de forme convenable (ref.1).

Le dépôt métallique est une opération délicate, car d'elle dépend dans une certaine mesure la valeur des différents paramètres du cristal. De même la forme des électrodes influe sur le mode de vibration et joue un rôle important sur la stabilité du résonateur. Enfin l'épaisseur du métal amortit la vibration et atténue considérablement le facteur de qualité. C'est d'ailleurs en dosant l'épaisseur du dépôt que l'on parvient à ajuster de façon précise (à quelques Hz près) la fréquence de résonance du cristal.

L'opération de métallisation se déroule généralement sous vide par vaporisation. Le cristal est masqué par un "cache" dont l'ouverture est aux dimensions de l'électrode choisie. On emploie souvent une sous-couche au chrome puis un dépôt d'or ou d'argent.

Dans les manipulations précédentes nous avons mis en évidence l'influence des diverses formes d'électrodes sur le régime transitoire des résonateurs.

Nous allons nous efforcer ici de réaliser un résonateur muni d'électrodes de faible surface. Nous serons toutefois limité par une trop forte diminution du facteur de qualité et par l'augmentation sensible de la résistance.

Afin de limiter davantage encore l'amplitude $\frac{\Delta f}{f}$ du régime transitoire, nous mettrons l'ampoule du résonateur à une pression voisine de 10^{-3} Torr.

b) Choix et réalisation

Partant de l'analyse comparative des différentes formes d'électrodes (fig.32) et compte-tenu du critère de stabilité de chacun des résonateurs testés, nous avons tout d'abord réalisé à titre d'essai un résonateur partiel 5 (5 MHz). La forme choisie est dérivée de l'électrode en Z du fondamental 5 MHz qui donnait le meilleur résultat d'ensemble. Pour ce dernier, la partie active des électrodes était pour des raisons d'ordre expérimental, localisée suivant un diamètre décalé de 45° avec l'axe optique Z. De cette façon le facteur de qualité se trouve en effet légèrement amélioré. Par contre les fixations se placent toujours suivant l'axe Z pour respecter l'existence d'un noeud de vibration. Deux bandes métallisées latérales assurent la conduction (fig.41).

Dans la réalisation de notre résonateur nous avons supprimé ces deux bandes latérales. Les nouvelles électrodes de largeur plus réduite sont disposées suivant l'axe Z (fig.42).

Le cristal, métallisé au chrome et à l'or a été fixé dans une ampoule de verre.

La mesure des différents paramètres du résonateur nous a permis de mettre en évidence un facteur de qualité Q voisin de 500 000. Par contre la résistance R_1 nous est apparue nettement excessive : 3,2 K Ω . En effet, la résistance d'un résonateur dépasse rarement quelques dizaines d'Ohms.

La présence d'un tel terme résistif dans une boucle d'oscillation nous a conduit à utiliser un amplificateur à grand gain. Sortie et Entrée étant en phase nous les avons relié à l'aide du résonateur. La stabilité de l'ordre de $2 \cdot 10^{-9}$ sur la durée d'une manipulation nous a paru satisfaisante.

electrodes

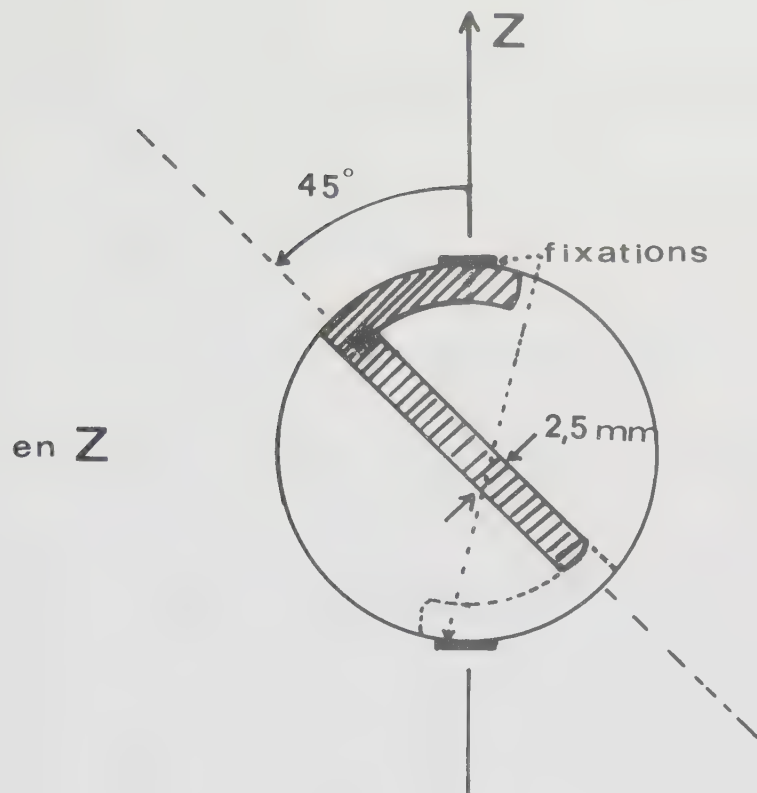


Fig:41

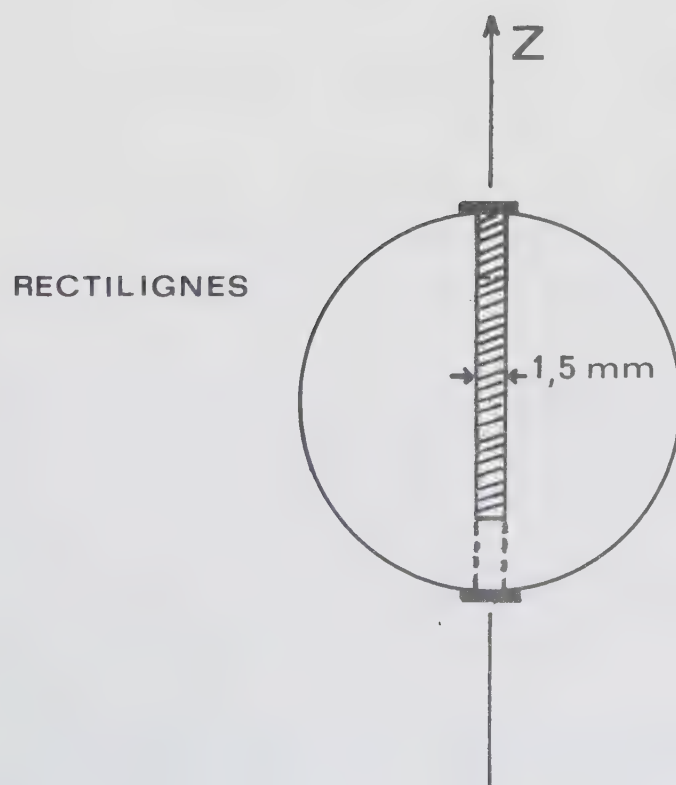


Fig:42

Le schéma de l'oscillateur figure à la page suivante (fig.43).

c) Résultats expérimentaux

Dans les mêmes conditions que précédemment :

- choc d'amplitude voisine de 5°C - Température initiale $61,5^{\circ}\text{C}$

- vitesse de chauffage $8^{\circ}\text{C}/\text{mn}$

Le résonateur retrouve sa stabilité ($2 \cdot 10^{-9}$) après un temps T_s de 400 secondes (fige.44).

Pour un chauffage constant et de même vitesse, nous avons relevé les valeurs $\frac{\Delta f_{\infty}}{f} = 0,8 \cdot 10^{-7}$ et le temps de réponse $\tau = 29 \text{ s}$ (fig.45).

De même la saturation intervient pour $\Delta T > 5^{\circ}\text{C}$.

Ces trois valeurs mettent clairement en évidence l'importance des électrodes dans la conduction thermique et par conséquent sur le régime transitoire des résonateurs.

L'amélioration est très sensible, si nous comparons ces valeurs à celles obtenues pour le partiel 5 à bouton central. En effet nous obtenions respectivement :

$$\frac{\Delta f_{\infty}}{f} \approx 7 \cdot 10^{-7} ; \tau = 200 \text{ s et la durée de stabilisation } T_s \approx 600 \text{ s.}$$

Ces résultats sont comparables à ceux du cristal fondamental à électrodes en Z : $\frac{\Delta f_{\infty}}{f} = 1,4 \cdot 10^{-7} ; \tau = 28 \text{ s} ; T_s = 200 \text{ s}$ avec une diminution sensible de l'amplitude : $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$.

oscillateur

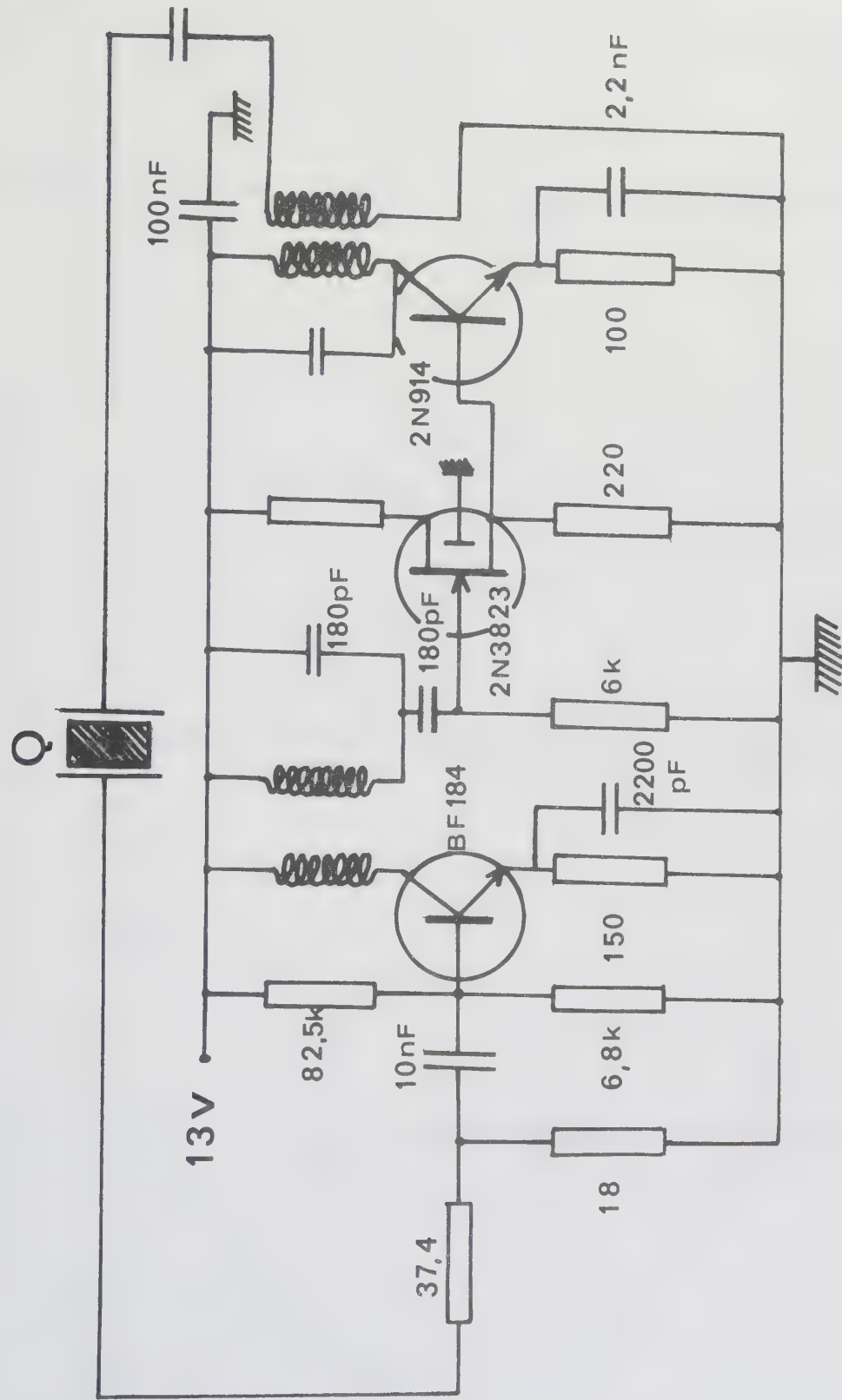


Fig:43

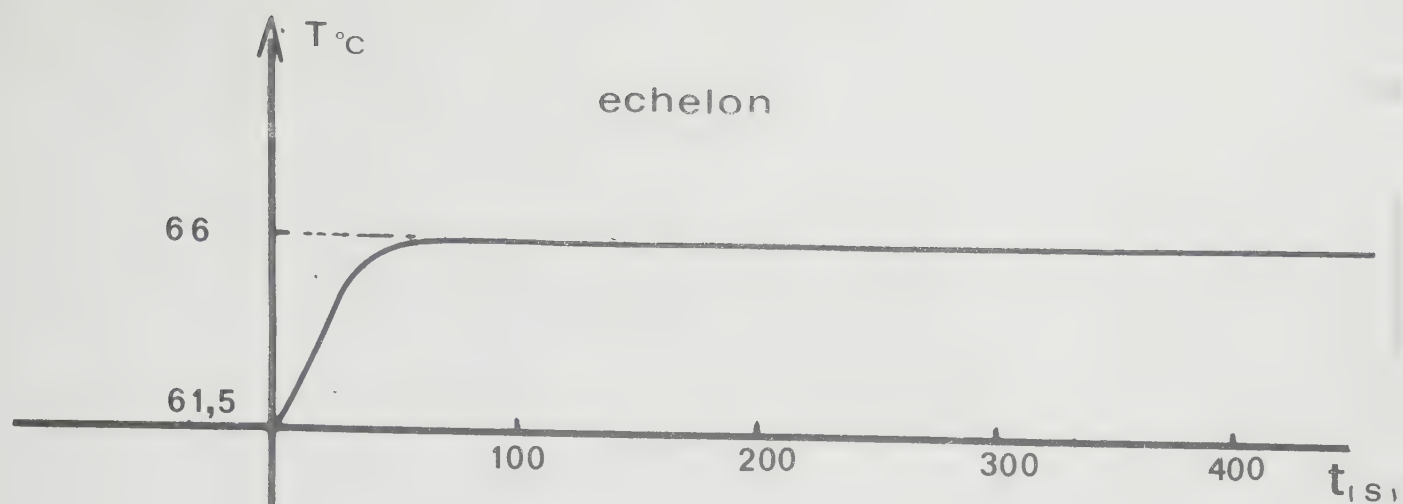


fig: 44

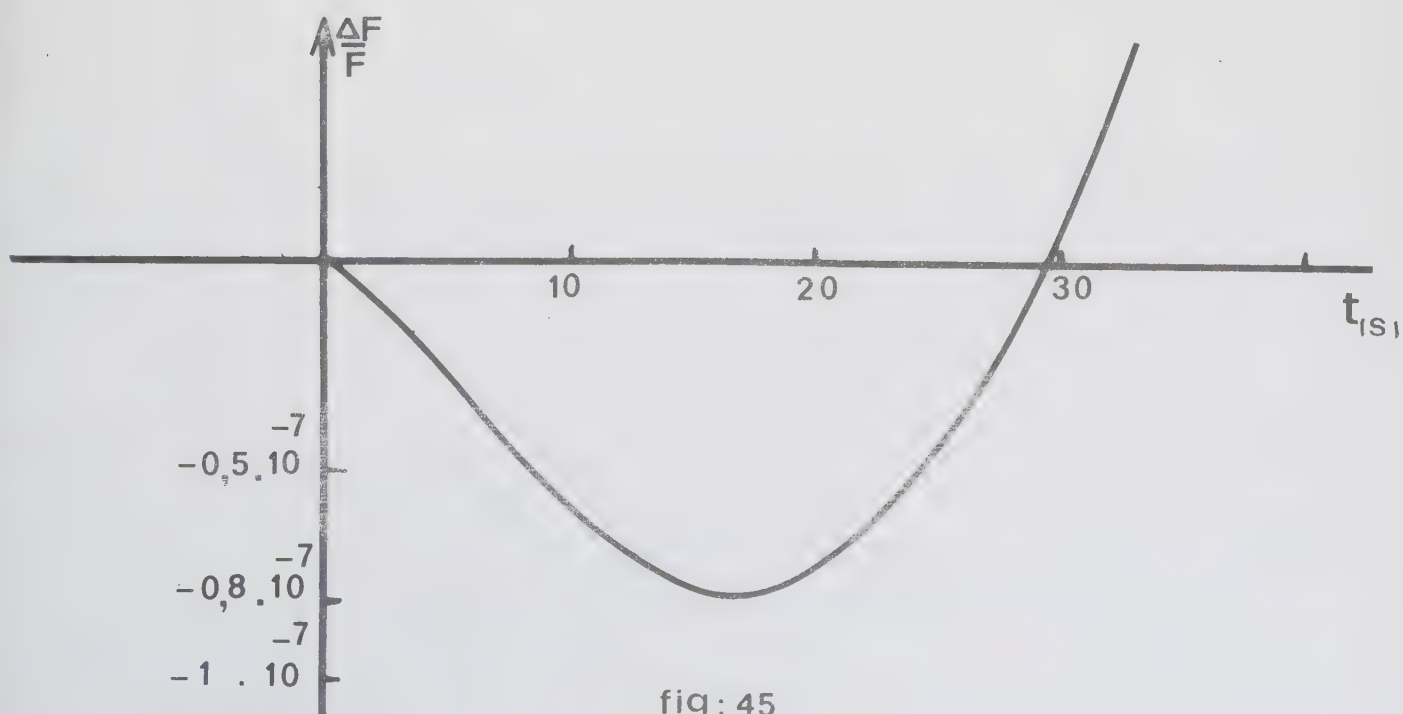
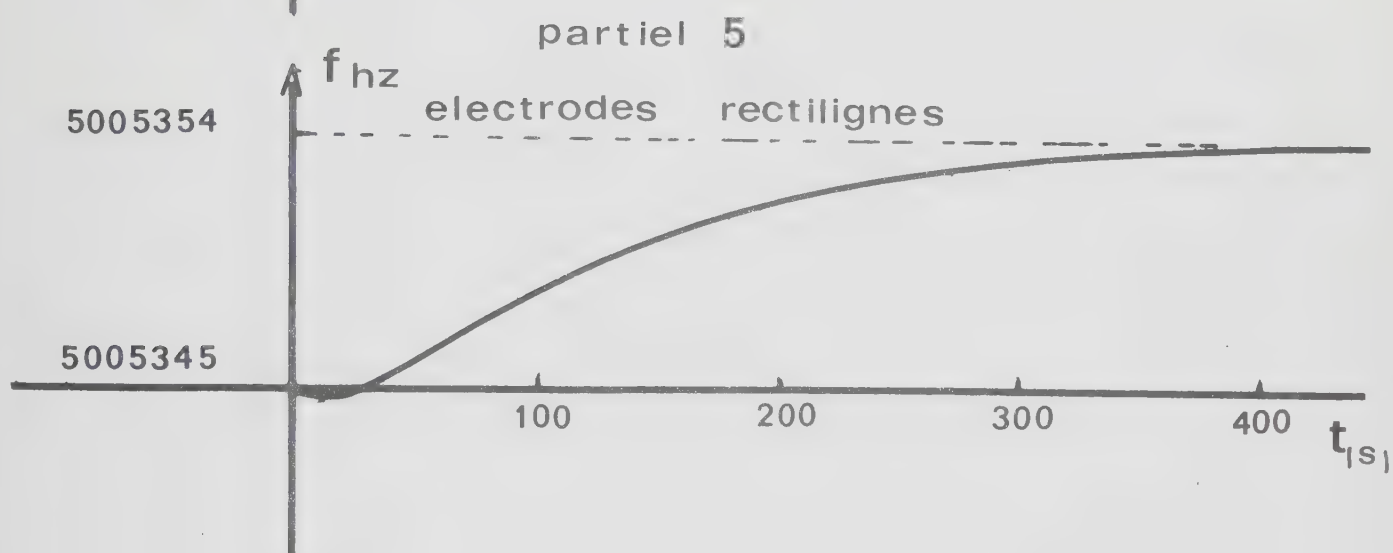


fig: 45

Ce type d'électrodes semblant convenir parfaitement nous avons réalisé un résonateur de faible épaisseur afin de diminuer encore le régime transitoire.

Des électrodes rectilignes ont donc été métallisées sur un cristal fondamental.

2) Résonateur fondamental à électrodes rectilignes

La métallisation a été faite à l'argent et la fixation est réalisée par deux pattes soudées à l'aide d'un ciment conducteur. Le vide réalisé est voisin de 10^{-3} Torr.

Les différentes mesures de paramètres indiquent une résistance voisine de 90Ω et une largeur de bande à -3DB voisine de 40 Hz. Le facteur de qualité Q est de 150000. L'oscillateur utilisé est le même que précédemment.

a) Durée de stabilisation T_s

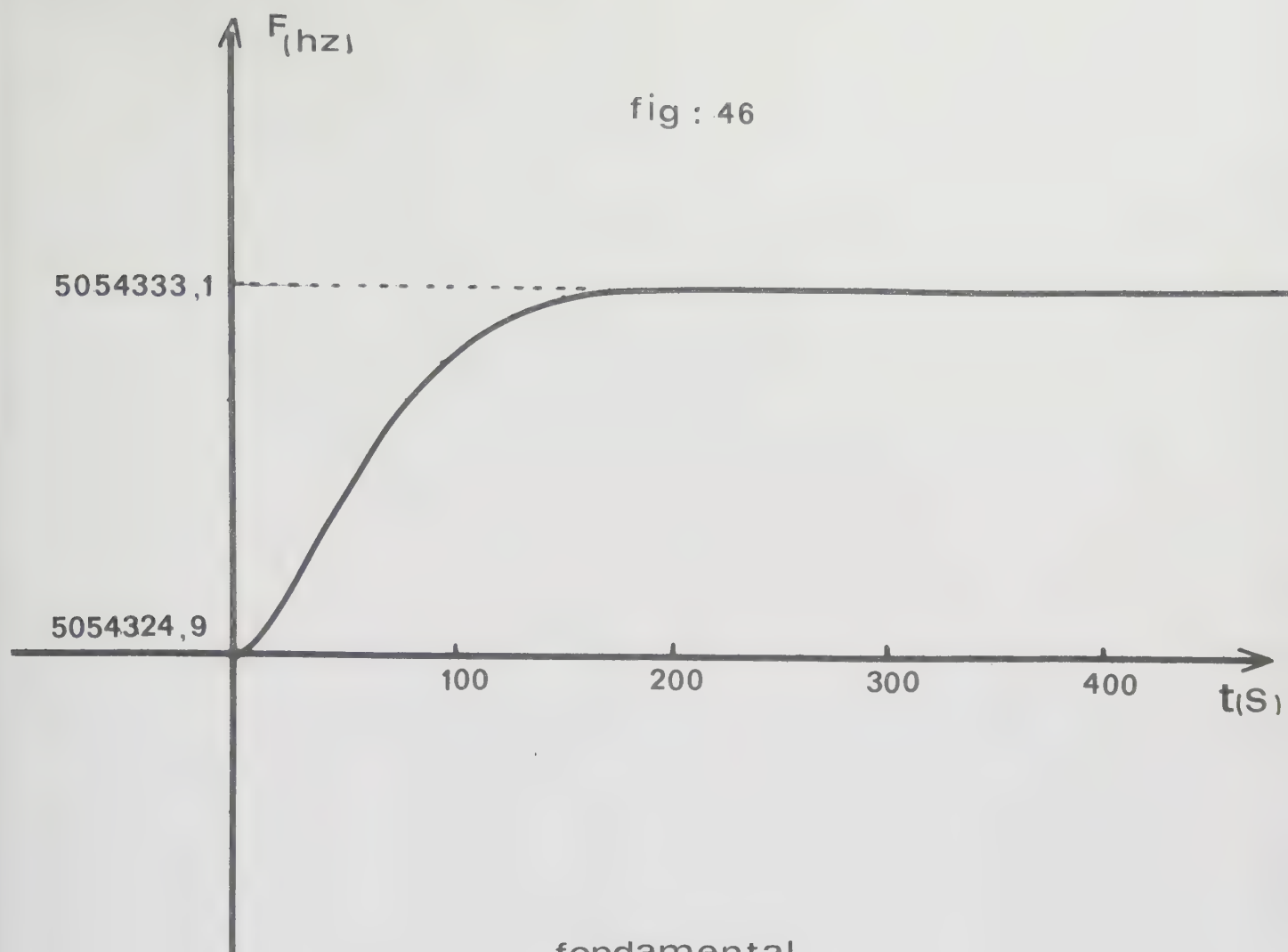
Pour le même choc de température que précédemment et si nous travaillons à la même échelle, nous notons seulement un palier de courte durée puis une rapide montée en fréquence (fig. 46).

La durée de stabilisation T_s est voisine de celle obtenue pour les autres quartz fondamentaux (180 s).

b) Mesure de $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$ et du temps de réponse

Il est remarquable de constater la très courte durée du régime transitoire (6,2 s) et sa très faible amplitude. En effet si nous dilatons l'échelle, il nous est possible de mettre en évidence une amplitude $\frac{\Delta f_{\infty}}{f}$ égale à $3,9 \cdot 10^{-9}$ soit 1,9/100 de Hz (fig. 47).

fig : 46



fondamental

electrodes rectilignes

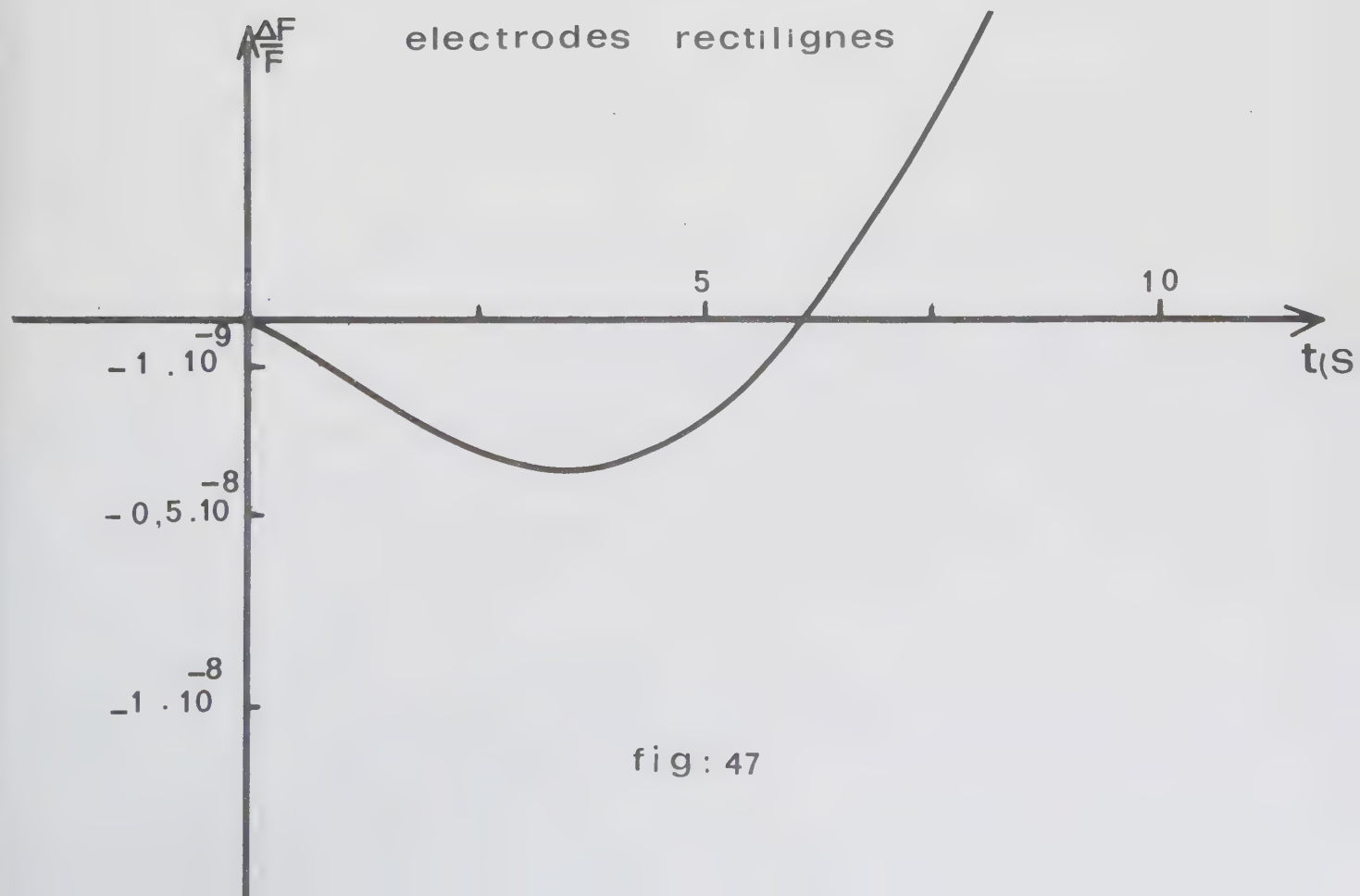


fig: 47

Etant donné la durée très limitée du phénomène, la saturation a lieu immédiatement $\Delta T > 1,5^\circ\text{C}$.

c) Influence de la vitesse de chauffage

Nous obtenons des résultats analogues aux quartz précédents. Toutefois la variation maximale enregistrée pour une vitesse de $15^\circ\text{C}/\text{minute}$ reste faible :

$$\tau = 6 \text{ s et } \frac{\Delta f}{f} = 8 \cdot 10^{-9}$$

Nous avons comparé les évolutions simultanées de la fréquence du résonateur, et de la température donnée par notre thermomètre à transistor. Il apparaît que leurs temps de réponse sont très voisins. La très faible variation de fréquence due au régime transitoire permettrait à un résonateur de ce type, mais à coefficient de température statique plus élevé, d'être utilisé en sonde thermique.

La mesure d'une température évoluant dans le temps est donc tout à fait possible sans erreur appréciable.

F - LE RESONATEUR A QUARTZ SOUMIS A UNE IMPULSION THERMIQUE

La plupart des résonateurs étant thermostatés, il peut arriver qu'en cas de fluctuation d'alimentation, panne de courant de courte durée, parasites, la température varie quelque peu pour revenir ensuite à un niveau régulé. Le quartz peut alors être soumis à une impulsion de température. Toutefois une "impulsion de température" n'est pas, de façon pratique, facilement réalisable.

Dans notre cas nous considérons impulsion une montée brusque en température suivie d'un retour plus lent à la température initiale.

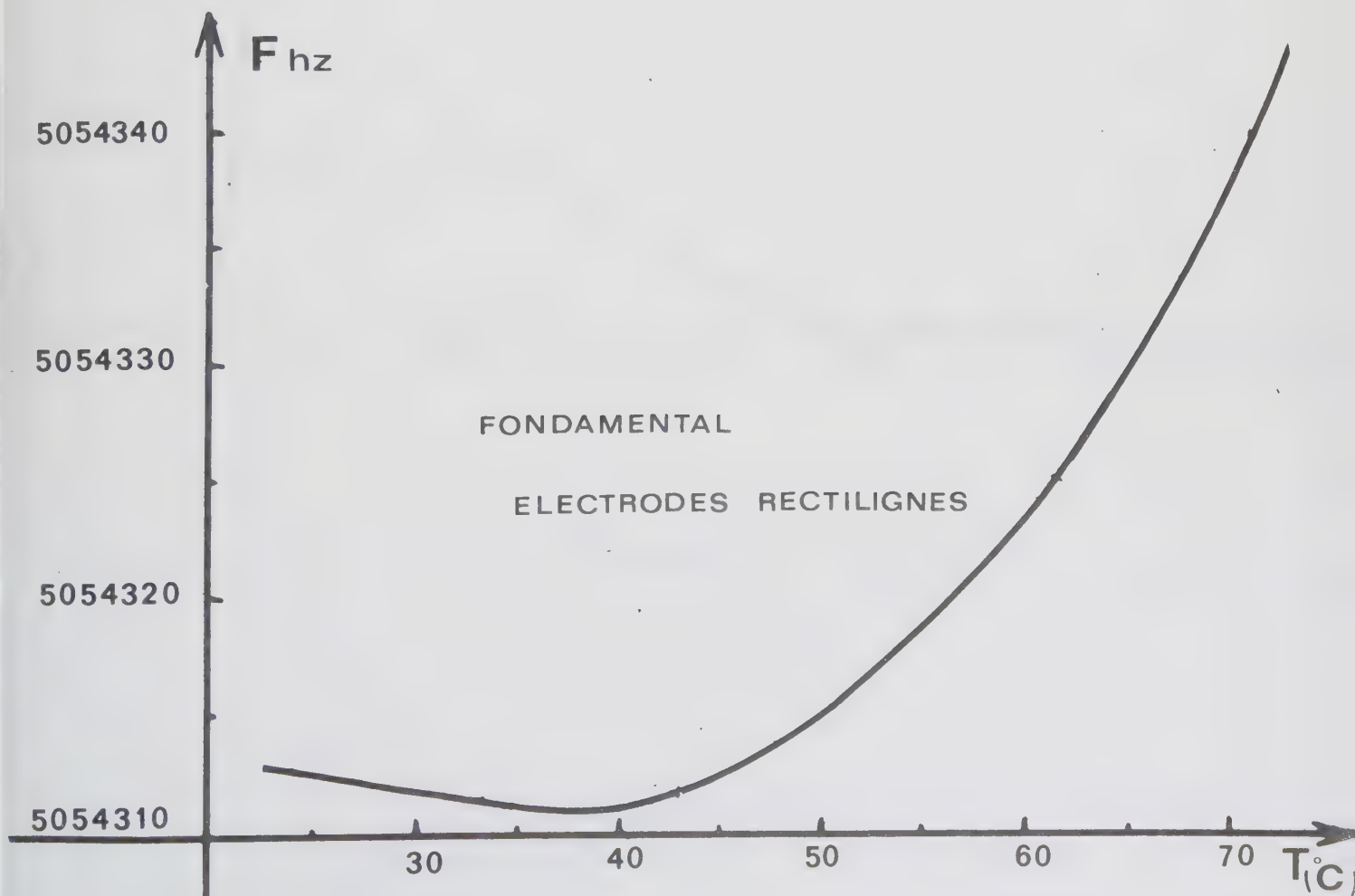
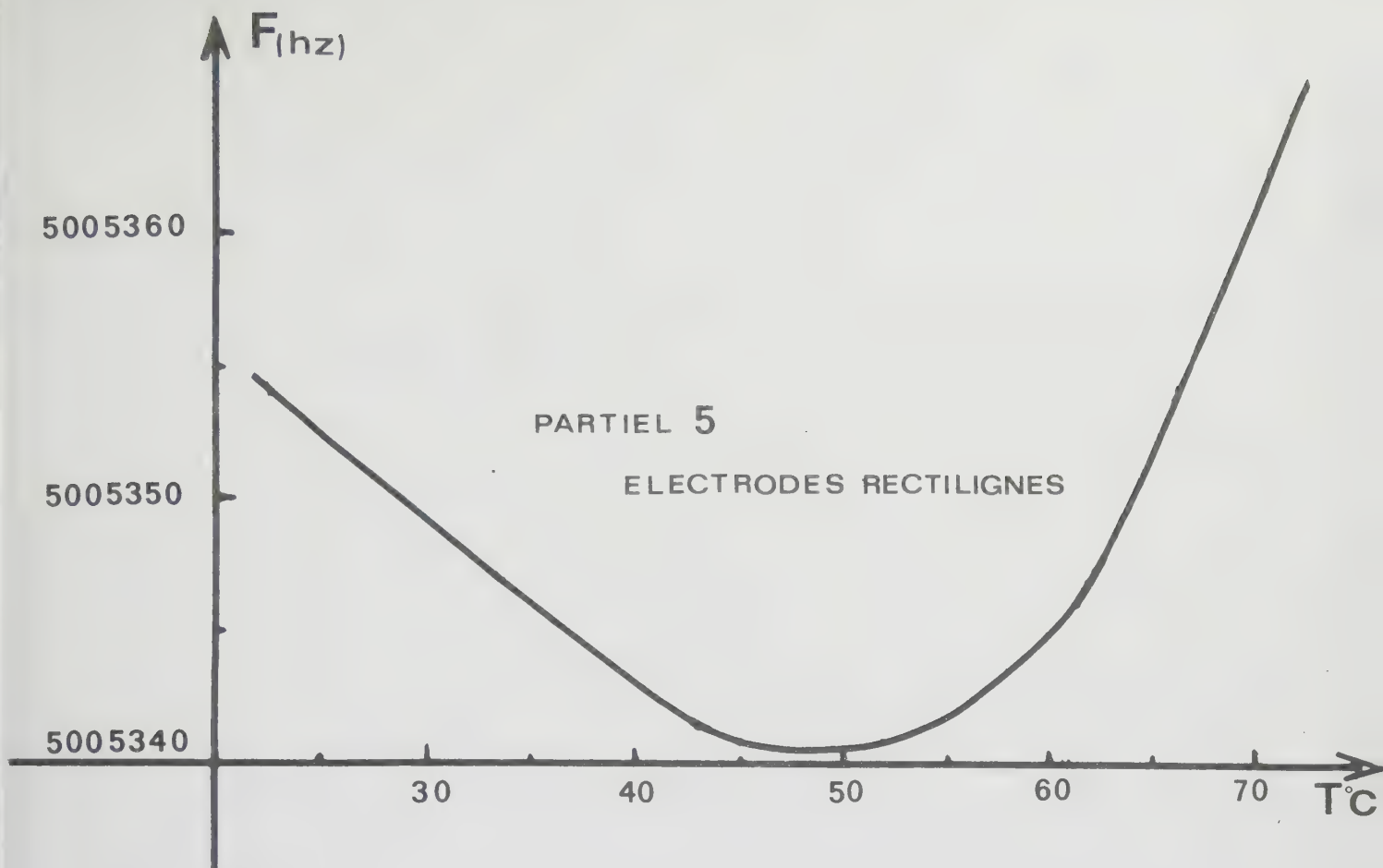


FIG : 48

Cependant la durée du retour sera dépendante de l'inertie de l'enceinte.

Les impulsions réalisées par la suite auront l'allure suivante (fig.49).

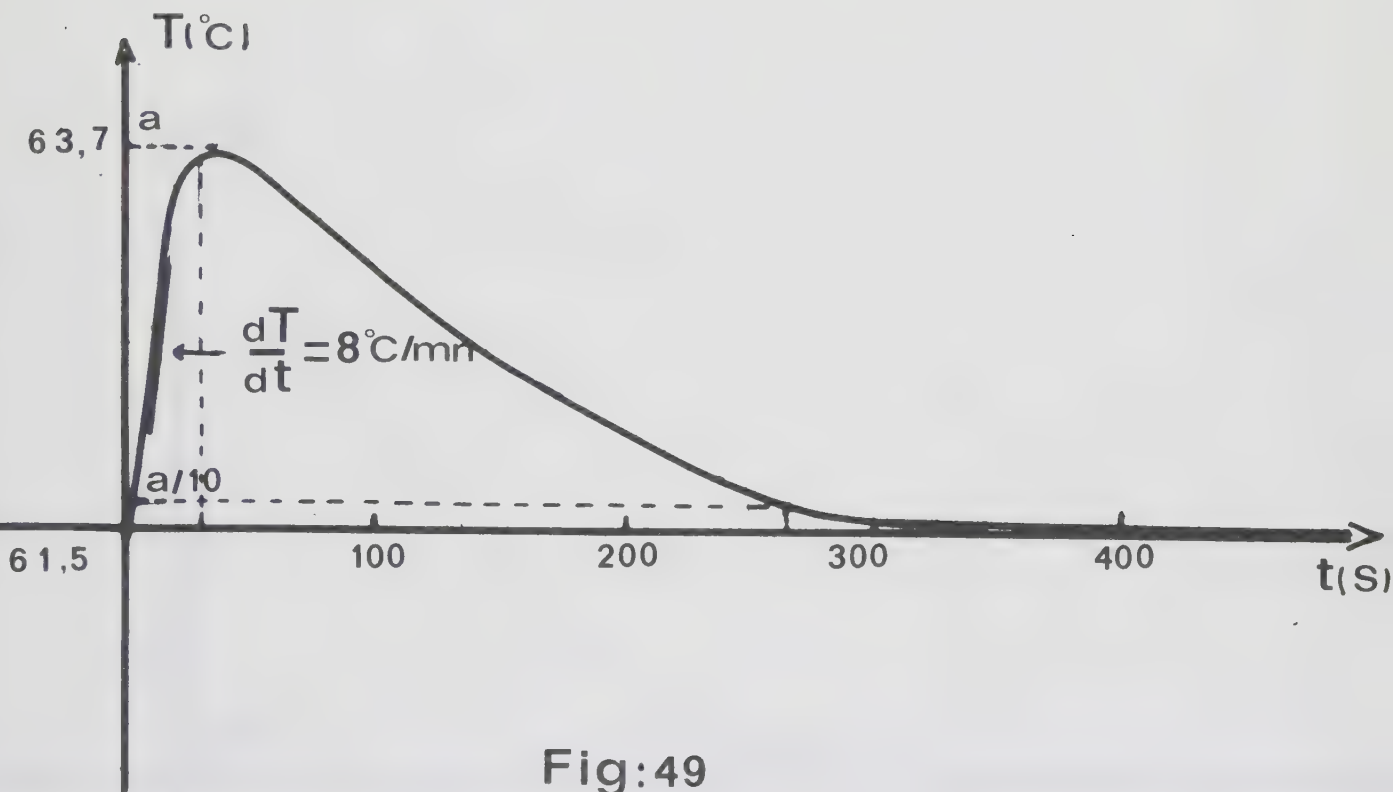
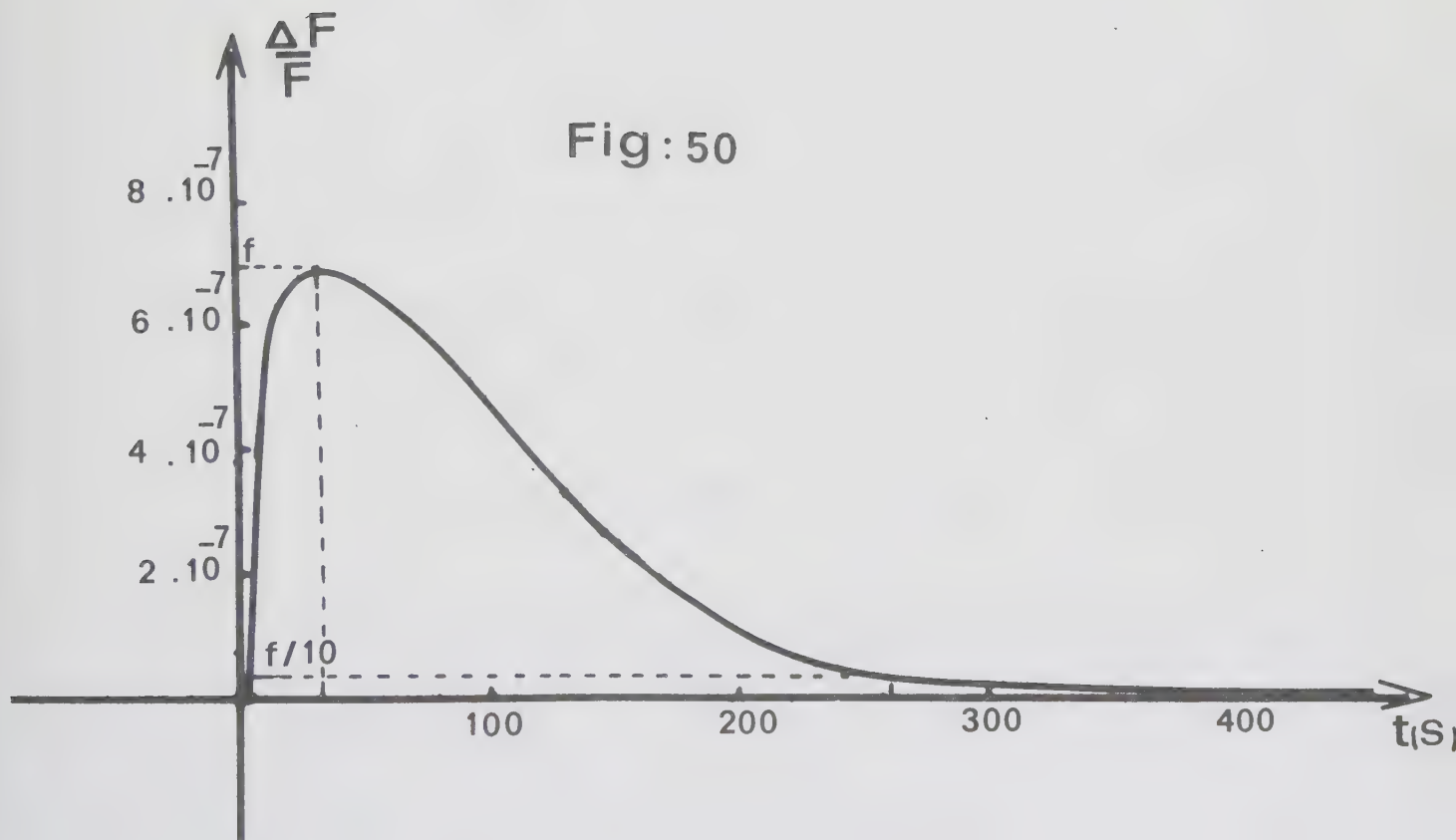


Fig:49

Si l'amplitude de l'impulsion est a , nous considérons l'impulsion terminée lorsque la température atteindra la valeur $a/10$.

1) Evolution simultanée des fréquences et températures pour le résonateur fondamental à électrodes rectilignes

La réponse d'un tel quartz apparaît comme suivant parfaitement l'évolution de la température ; si le quartz est soumis à l'impulsion précédente nous obtenons la réponse suivante (fig.50)



Si nous reprenons la même règle que précédemment, nous obtenons pour la température et la fréquence, des temps de stabilisation identiques.

La comparaison des deux courbes indique une réponse quasiment linéaire du résonateur.

L'utilisation d'un tel cristal comme sonde de température paraît donc logique. Nous allons examiner cette réponse pour différentes vitesses de chauffage et pour différentes amplitudes.

a) Vitesse de chauffage constante, amplitude d'impulsions différentes

La vitesse de chauffage étant fixée ($8^{\circ}\text{C}/\text{min}$), l'enceinte est chauffée pendant les durées successives t_1 , t_2 , t_3 . Nous avons représenté sur la figure 51 les impulsions de température réalisées et les réponses correspondantes du résonateur.

La pente $f(t)$, constante pendant la montée en température est proportionnelle à la vitesse de chauffage. Les enregistrements peuvent être considérés comme homotétiques.

b) Vitesse de chauffage variable, temps de chauffe constant

L'enceinte est maintenant chauffée pendant une durée constante, mais c'est la vitesse de chauffage qui prend différentes valeurs. Les pentes de chaque impulsion sont variables.

La fréquence du résonateur reproduit fidèlement et avec une bonne précision l'évolution de la température (fig.52).

Les maxima d'amplitude croissante sont maintenant alignés ; ils se produisent pour un même temps constant fonction de la durée du chauffage.

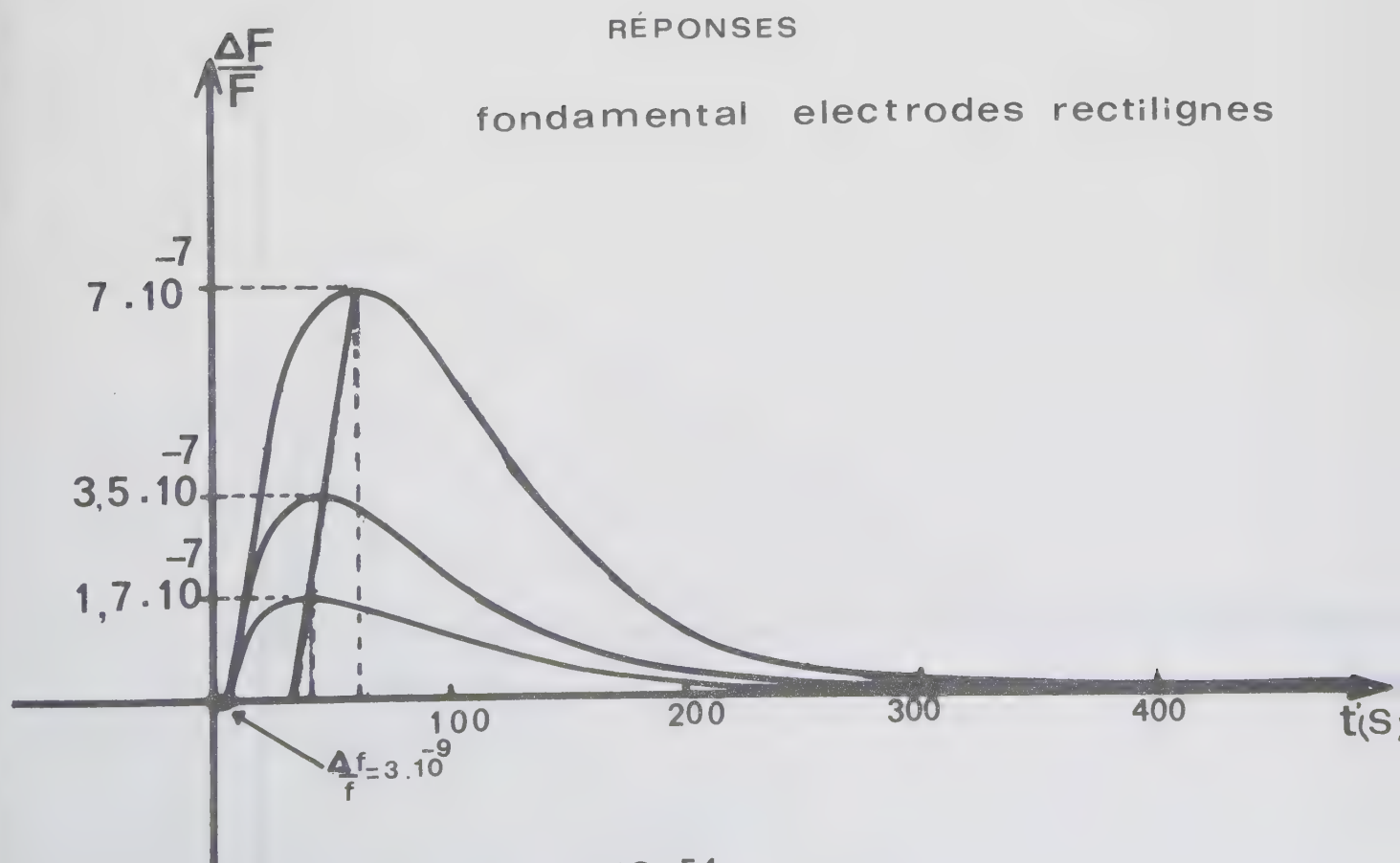
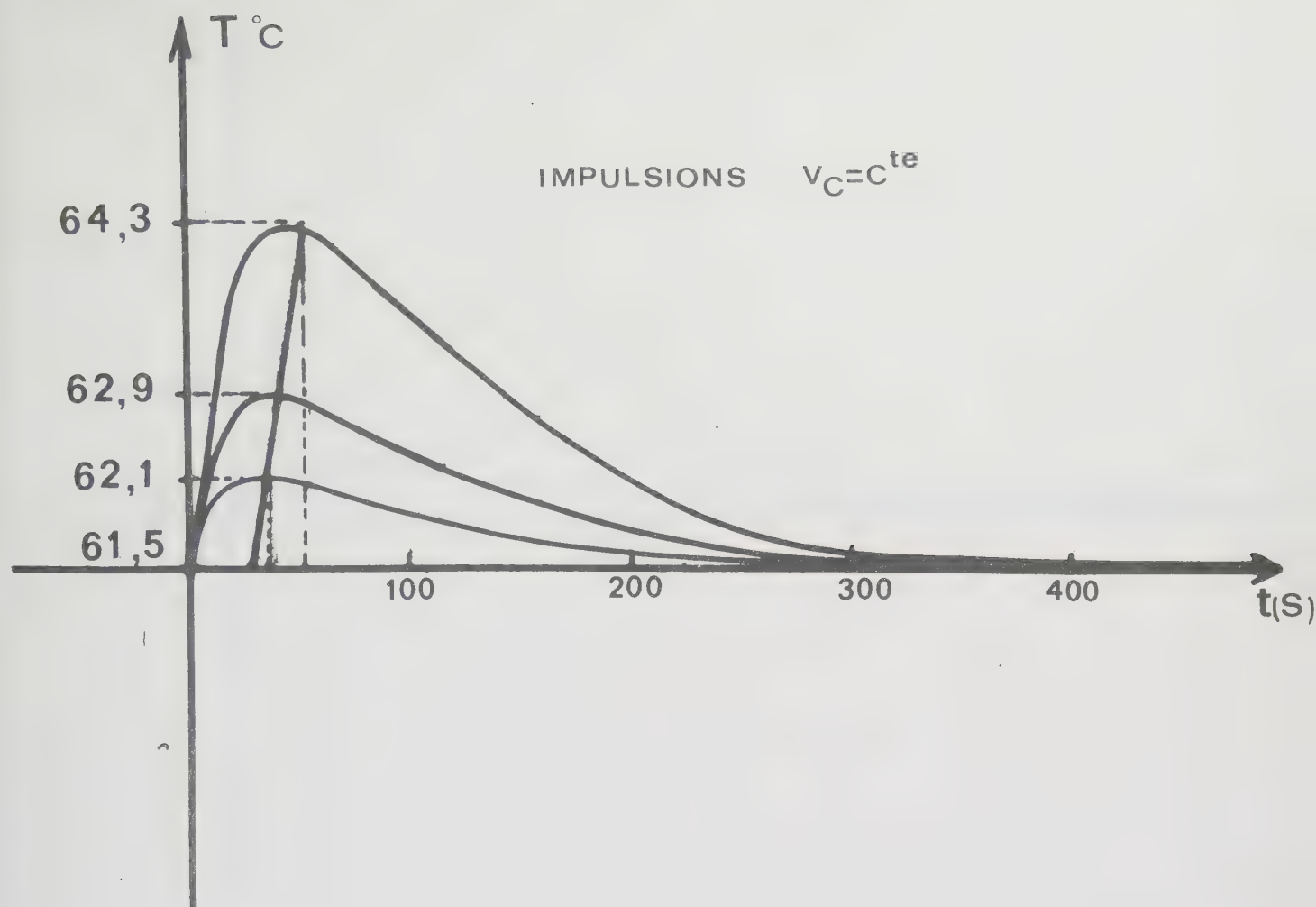


FIG: 51

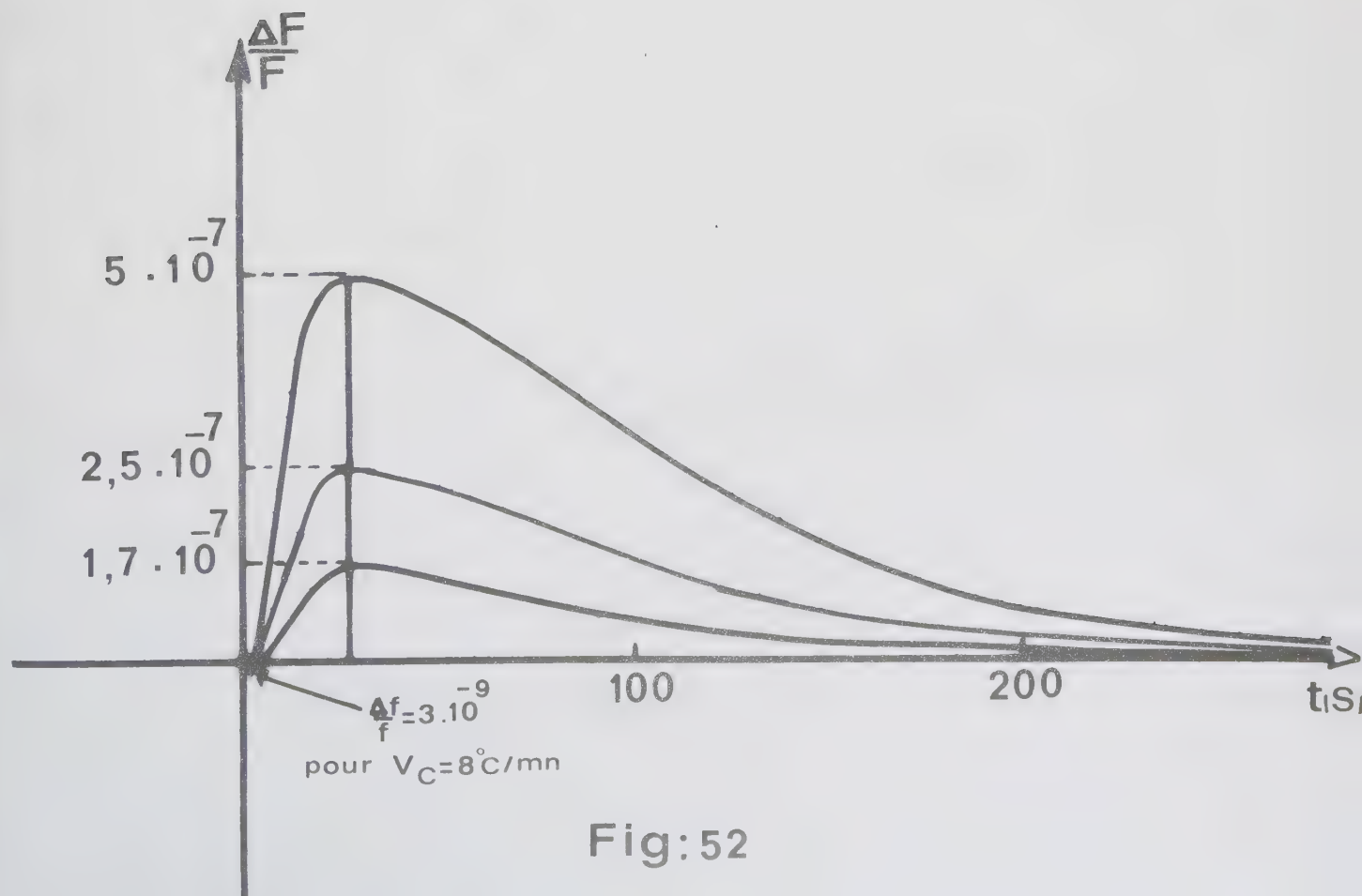
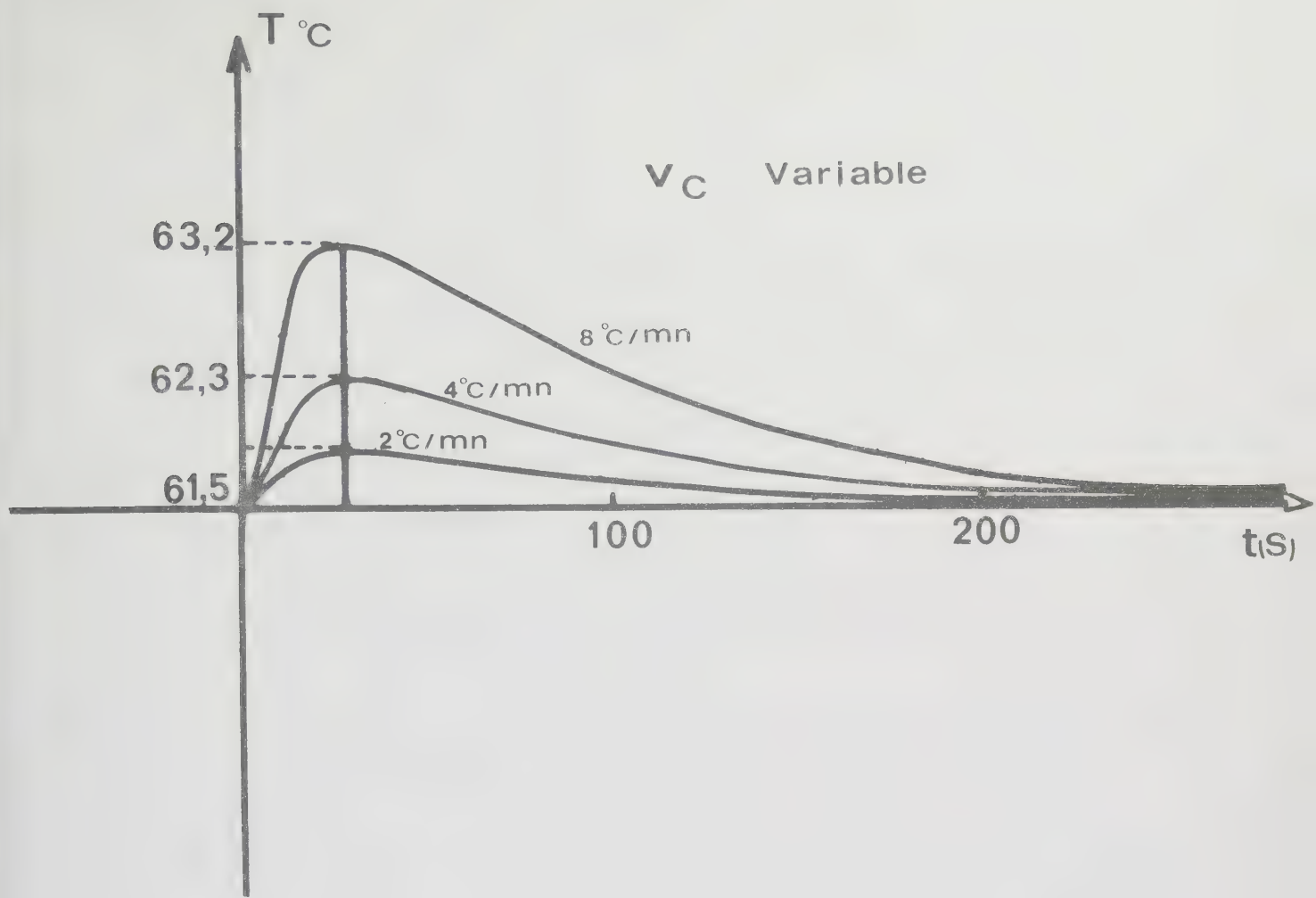


Fig:52

On peut noter une augmentation de l'amplitude $\frac{\Delta f}{f}$ fonction de la vitesse de chauffage. Le régime transitoire reste toutefois très limité dans le temps et en amplitude.

Tous ces enregistrements confirment l'aptitude de ce type de résonateur à suivre des évolutions rapides de température.

2) Comparaison avec le résonateur AT, partiel 5, électrodes à bouton central

Il nous a paru intéressant de soumettre un tel résonateur à une impulsion de température.

Nous avons comparé les deux types de résonateurs en reproduisant les réponses du cristal à électrodes rectilignes fondamental, et du cristal partiel 5 à bouton central sur un même graphique. L'impulsion de température correspondante est également représentée (fig.53).

Nous voyons très nettement ici, l'inadaptation du résonateur partiel 5 à bouton central à réaliser un bon capteur de température.

Du fait de son régime transitoire la réponse de ce cristal est tout à fait non linéaire et ne peut en aucun cas refléter fidèlement l'évolution d'une température.

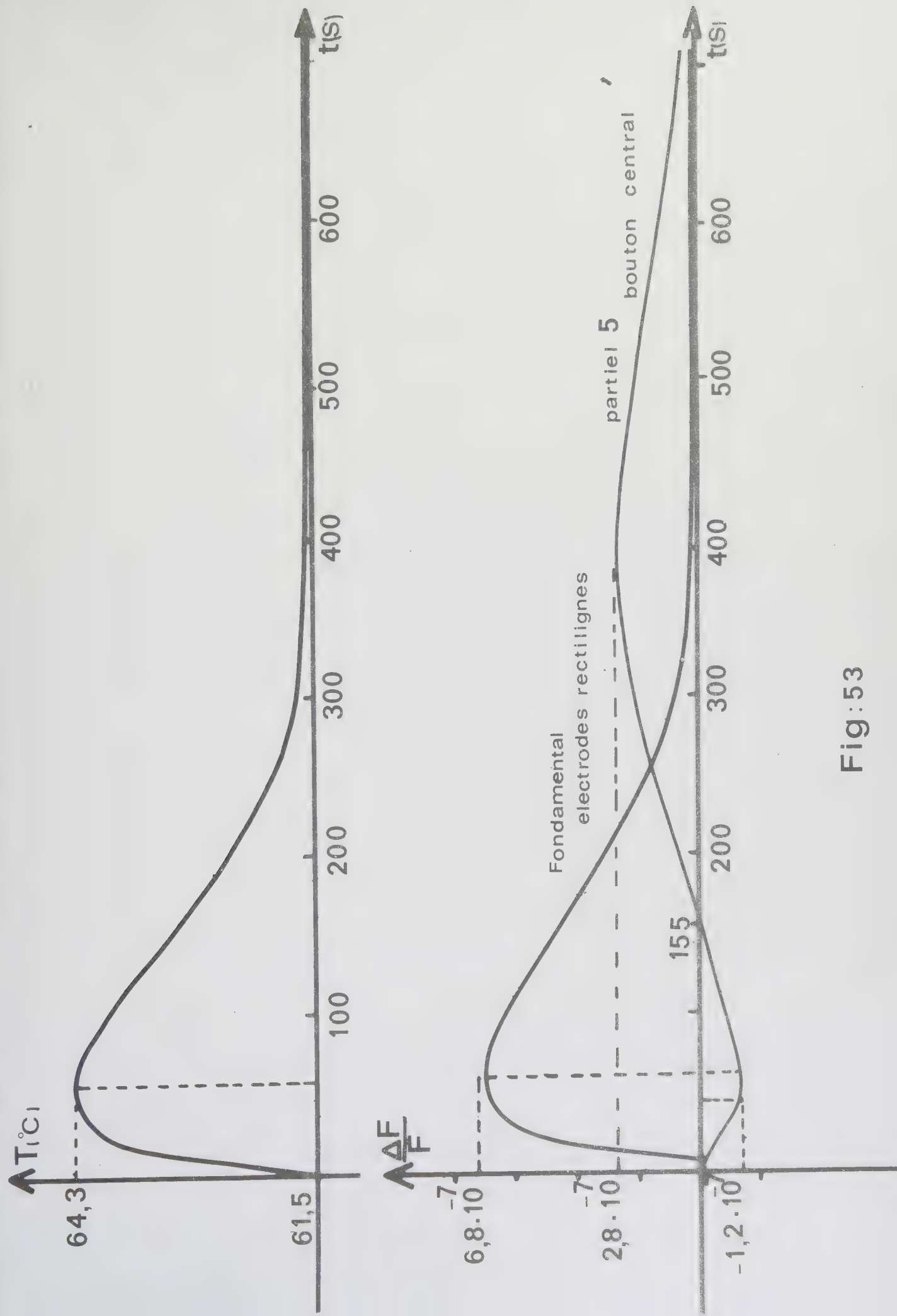


Fig:53

TROISIEME PARTIE

III - E T U D E T H E O R I Q U E

Au début de ce mémoire nous avons supposé que la chute de fréquence pouvait être due à l'apparition de contraintes quasi statiques, internes ou externes au résonateur.

Nous allons, dans cette troisième partie, nous efforcer de mettre en évidence théoriquement cette fois, l'existence et l'influence de ces contraintes.

A - CALCUL DE LA DIFFUSION DE CHALEUR A TRAVERS UNE PLAQUE DE QUARTZ

1) Calcul de la solution

La plaque est supposée orientée comme dans la figure 54. Longueur et largeur sont supposées infinies par rapport à l'épaisseur.

L'épaisseur e_0 est portée par OY et l'origine est située sur une face.

Etant donnés les chocs de température réalisés expérimentalement, nous supposerons la conductivité θ et la densité ρ comme constantes.

De même, l'anisotropie du cristal n'aura pas d'influence pour ce modèle unidimensionnel, et nous prendrons $\theta = \theta_y$

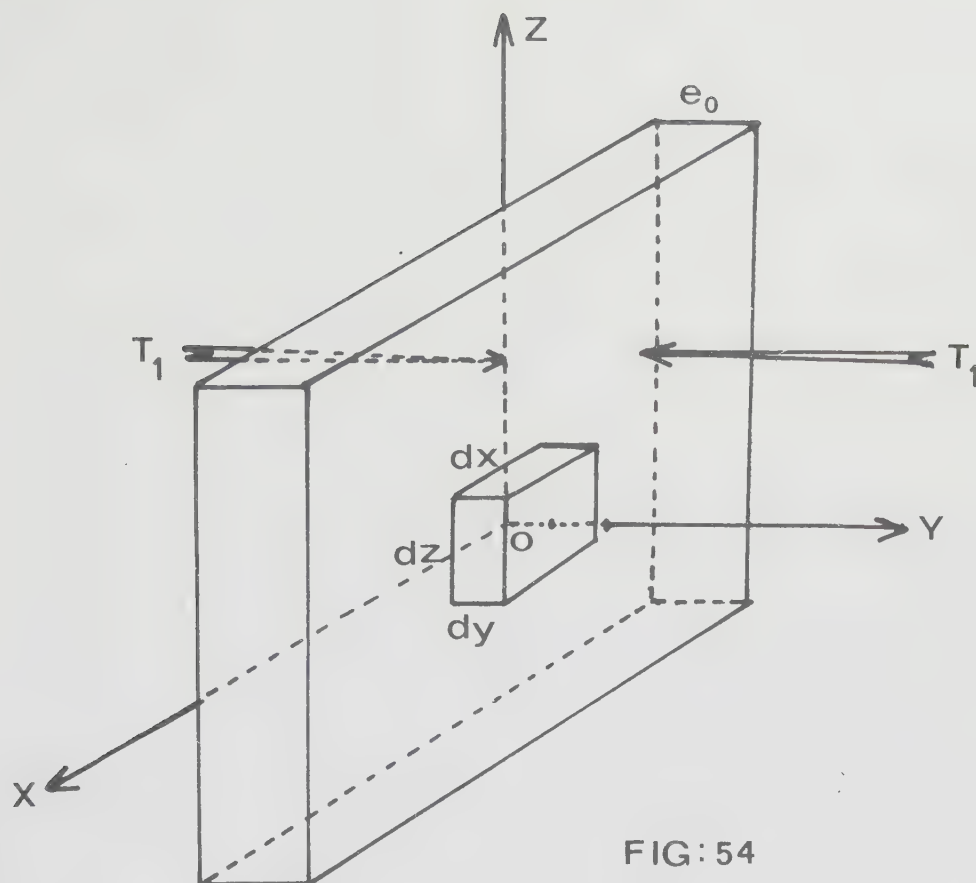


FIG: 54

Nous considérerons l'élément de volume $dx.dy.dz$ et nous supposerons que la plaque de quartz (à la température initiale T_0) se trouve plongée de façon instantanée dans un bain à la température T_1 (réf.j).

La quantité de chaleur passant dans le temps dt à travers une surface dS peut s'écrire :

$$\delta Q = \theta \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dS \cdot dt$$

avec $\frac{\partial T}{\partial n}$ = gradient de température suivant la normale $\vec{n}$ à dS

θ = coefficient de conductivité thermique

dt = temps pendant lequel passe dQ

La chaleur parvenue dans le temps dt dans l'élément $dx.dy.dz$ s'écrit :

$$\delta Q = \rho \cdot C_T \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

avec ρ : densité

C_T = chaleur massique à contraintes constantes (réf.1)

. Sur la face $(dx.dz)$ de l'élément, à l'abscisse y la quantité de chaleur sortante s'exprime par :

$$- \left(\theta \frac{\partial T}{\partial y} \right)_y \cdot dx \cdot dz \cdot dt$$

. A l'abscisse $y + dy$, la quantité de chaleur rentrée est :

$$\theta \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y+dy} \cdot dx \cdot dz \cdot dt$$

Si nous considérons l'ensemble de l'élément, l'application du théorème des accroissements finis donne :

$$\left[\left(\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left(\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right)_y \right] dx \cdot dz \cdot dt = \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \cdot dx \cdot dz \cdot dt$$

En identifiant avec l'expression précédente, il vient :

$$\rho \cdot C_T \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\rho C_T}{\theta} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Nous posons $\frac{\rho C_T}{\theta} = \alpha$ où α représente le coefficient de diffusivité.

En unité MKS : $\alpha = 8.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial T(y,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2}$$

La solution d'une telle équation s'écrit :

$$T(y,t) = f(t).g(y)$$

soit :

$$T(y,t) = e^{-\omega^2 \alpha t} \left[A \cos \omega y + B \sin \omega y \right]$$

2) Détermination des constantes ω , A et B

Nous résonnerons dans le cas particulier où $T_1 = 0$, ce qui revient à plonger pour $t = 0$ la plaque de quartz dans un bain à température nulle, sachant que sa température initiale est T_0 .

Les conditions initiales sont donc :

$$t = 0 ; \quad T(y,t) = T_0$$

Les conditions aux limites sont :

$$t \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} y = 0 & T(0,t) = T_1 = 0 \\ y = e_0 & T(e_0,t) = T_1 = 0 \end{array} \right.$$

L'application des conditions aux limites donne :

a) $T(0,t) = 0 \quad A = 0$

b) $T(e_0,t) = 0$ soit $e^{-\omega^2 t} \left[B \sin \omega e_0 \right] = 0$

Nous en déduisons donc : $\omega_n = \frac{n\pi}{e_0}$

La solution peut alors s'écrire :

$$T(y,t) = \sum e^{-\left(\frac{n\pi}{e_0}\right)^2 t} B_n \sin \frac{n\pi y}{e_0}$$

L'application des conditions initiales donne :

$$T(y,0) = T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi y}{e_0}$$

Pour déterminer B_n nous devons donc associer à T_0 une fonction périodique impaire (terme en sinus) et symétrique par rapport à l'axe des Y (composante continue nulle) et qui représente entre 0 et e_0 la répartition initiale des températures.

Nous prendrons donc la fonction représentée par la figure 55.

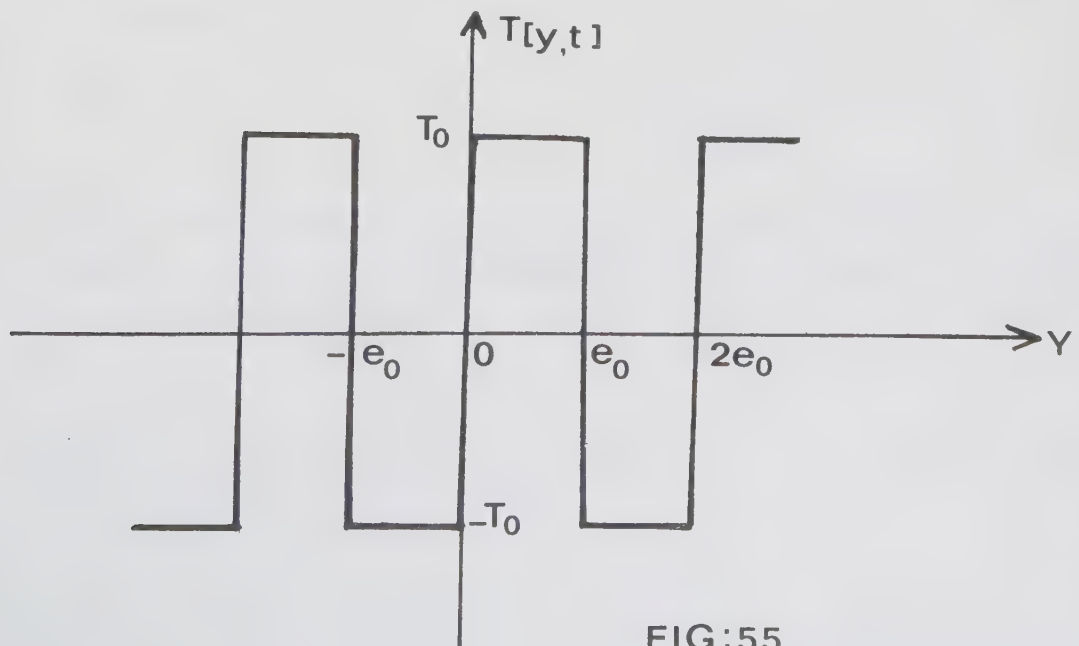


FIG:55

Nous obtenons ainsi directement les coefficients B_n de la série de Fourier :

$B_n = 0$ pour n pair

$$B_n = \frac{1}{e_0} \int_{-e_0}^{+e_0} T(y) \sin \frac{n\pi y}{e_0} dy$$

soit
$$B_n = \frac{4}{\pi n} T_0 \quad \text{si } n \text{ impair}$$

Finalement la solution cherchée s'écrit :

$$T(y,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} T_0 \cdot e^{-\frac{(2p+1)^2 \pi^2}{e_0^2} at} \sin(2p+1) \frac{\pi y}{e_0}$$

Dans la réalité T_1 est différent de 0°C . Nous avons par simple translation :

$$T_1 - T(y,t) = \frac{4}{\pi} (T_1 - T_0) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} e^{-\frac{(2p+1)^2 \pi^2}{e_0^2} at} \sin(2p+1) \frac{\pi y}{e_0}$$

La quantité $\Delta = \frac{e_0^2}{\pi^2 \alpha}$ est une constante de temps. Elle est d'autant plus petite que l'épaisseur de la plaque est plus faible et que la diffusivité α est plus grande.

Dans l'étude théorique qui suit, l'origine des y se trouve au centre de la plaque. Un changement d'axe ($e_0/2$) permet d'aboutir à la solution suivante :

$$T(y,t) - T_0 = (T_1 - T_0) \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-\frac{(2p+1)^2}{\Delta} t} \cos(2p+1) \frac{\pi y}{e_0} \right]$$

- Pour un résonateur 5 MHz fondamental

$$\frac{1}{\Delta} \approx 90$$

$$e_0 \approx 0,33 \text{ mm}$$

- Pour un résonateur 5 MHz partiel 5

$$\frac{1}{\Delta} \approx 3$$

$$e_0 \approx 1,65 \text{ mm}$$

Nous avons représenté graphiquement cette solution pour les deux types de résonateur (figure 56).

Nous remarquons immédiatement le temps de stabilisation 30 fois plus élevé d'un résonateur partiel 5.

En fait les temps de stabilisation observés expérimentalement sont beaucoup plus longs en raison des caractéristiques de l'enceinte et de la résistance thermique importante de l'ampoule et du milieu gazeux.

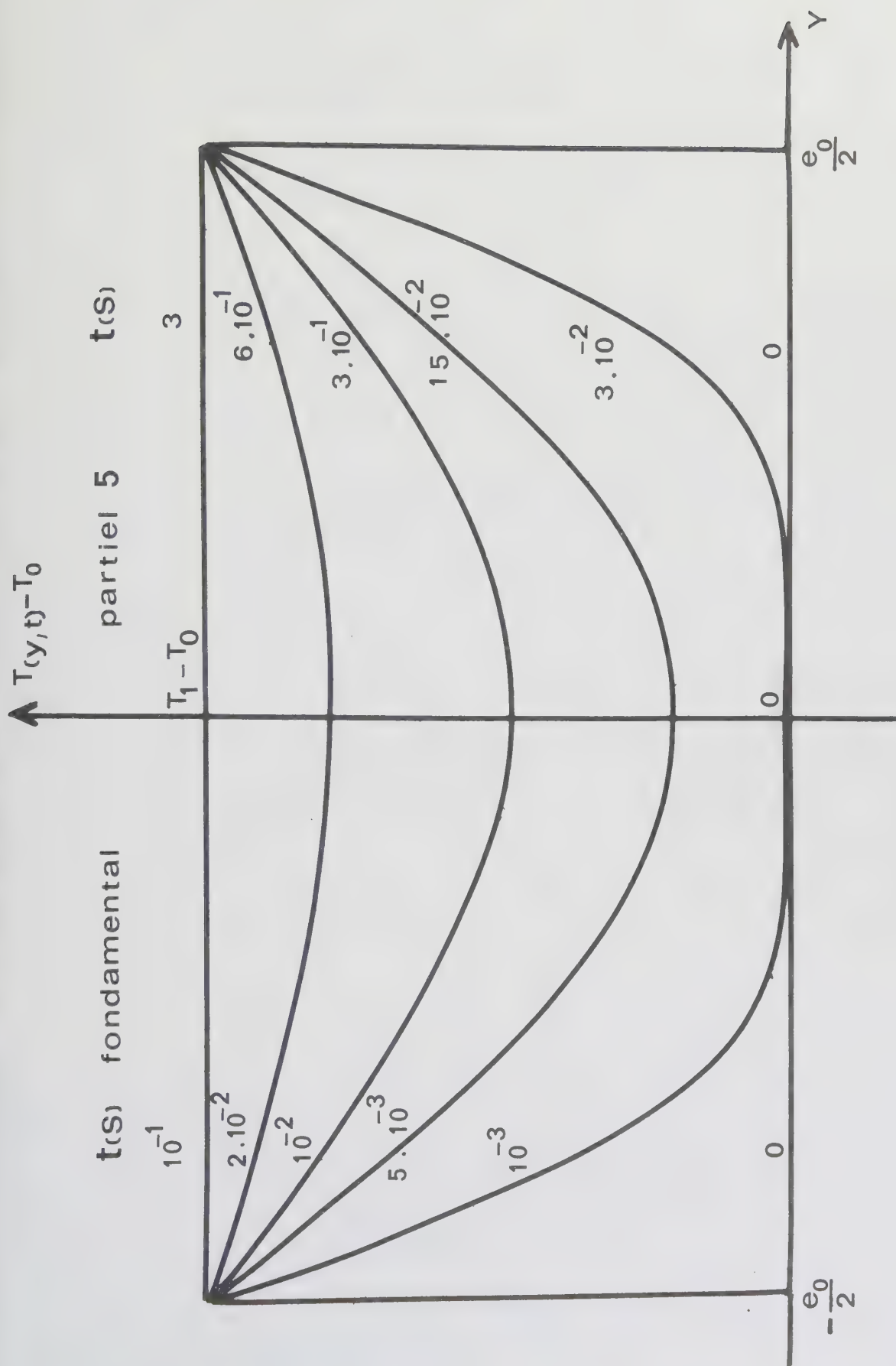


fig:56

B - APPLICATION AU CALCUL DU REGIME TRANSITOIRE

Le mouvement d'une plaque vibrant en cisaillement d'épaisseur est représenté sur la figure 57.

Dans notre cas où l'épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions de la plaque, nous raisonnerons sur la figure simplifiée n° 58 en négligeant le cisaillement d'épaisseur de direction Y' et le cisaillement de surface du plan XZ' .

Nous supposerons désormais l'origine des Y au centre de la plaque.

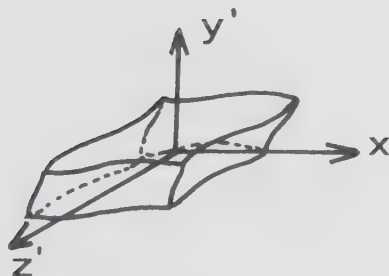


FIG : 57

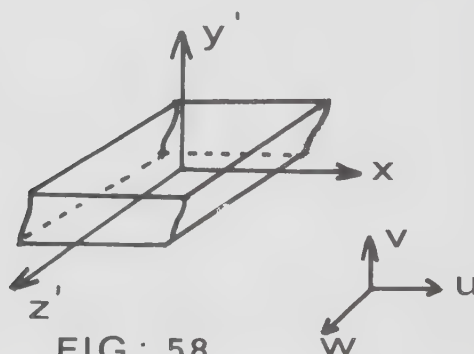


FIG : 58

Dans notre étude, seul le déplacement u (suivant X) sera pris en considération et de plus u ne sera fonction que de y , soit $U = U(y)$.

Le champ $\vec{E}$ est défini par sa composante unique E_2 suivant Y' .

Les déformations S_j ($j = 1, \dots, 6$) se réduisent à $S_6 = \frac{\partial U}{\partial y}$ et de même les efforts T_i ($i = 1, \dots, 6$) sont représentés par T_5 et T_6 (réf. e et d).

Si nous négligeons l'effet piézoélectrique et l'amortissement le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial T_6}{\partial y}} \quad (5)$$

avec $T_6 = C_{66} S_6$ et $S_6 = \frac{\partial U}{\partial y}$

1) Etablissement de la nouvelle équation différentielle

Si M est la masse du cristal, la densité en un point sera donnée par l'expression :

$$\rho = \frac{dM}{de.dL.dh}$$

Si la température passe de T_0 à T nous aurons au 1er ordre :

$$de = de_0 \left[1 + \alpha_y^{(1)} (T - T_0) \right]$$

$$dL = dL_0 \left[1 + \alpha_x^{(1)} (T - T_0) \right]$$

$$dh = dh_0 \left[1 + \alpha_z^{(1)} (T - T_0) \right]$$

Dans le cas du quartz $\alpha_x^{(1)} = \alpha_y^{(1)}$ et au 1er ordre :

$$de.dL.dh = de_0.dL_0.dh_0 \cdot \left(1 + (T - T_0) (2 \alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}) \right)$$

La densité ρ en ce même point s'écrira pour la température T :

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + (T-T_0) [2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}]} \quad \text{avec } \rho_0 = \rho(T_0)$$

Nous pouvons également définir le coefficient d'élasticité C_{66} pour la température T :

$$C_{66} = C_{66}^0 \left[1 + \alpha_{C_{66}}^{(1)} (T-T_0) \right]$$

En fonction de la température et au 1er ordre, l'équation (5) devient :

$$\frac{\rho_0}{1 + (T-T_0) [2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}]} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{66}^0 [1 + \alpha_{C_{66}}^{(1)} (T-T_0)] \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

D'après l'expression (4), nous posons :

$$T(y,t) - T_0 = (T_1 - T_0) V(y,t)$$

$$\text{avec } V(y,t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \cos(2p+1) \frac{\pi y}{e_0}$$

(6)

L'équation peut alors s'écrire :

$$\frac{\rho_0}{1 + (T_1 - T_0) V(2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)})} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{66}^0 \frac{\partial U}{\partial y} + C_{66}^0 \alpha_{C_{66}}^{(1)} (T_1 - T_0) V \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

En multipliant les deux membres par :

$$1 + (T_1 - T_0) V [2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}], \text{ on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= C_{66}^0 \cdot \left[1 + (T_1 - T_0) V (2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}) \right] \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ &+ C_{66}^0 \alpha_{C_{66}}^{(1)} (T_1 - T_0) V \cdot \left[1 + (T_1 - T_0) V (2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}) \right] \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ &+ C_{66}^0 \alpha_{C_{66}}^{(1)} (T_1 - T_0) \cdot \left[1 + (T_1 - T_0) V (2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}) \right] \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}$$

Soit en effectuant au 1er ordre et en divisant les deux membres par C_{66}^0 :

$$\frac{\rho_0}{C_{66}^0} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cdot \left[1 + (T - T_0) V (2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)} + \alpha_{C_{66}}^{(1)}) \right] + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \alpha_{C_{66}}^{(1)} (T_1 - T_0)$$

Si nous introduisons le coefficient : $\mu = 2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)} + \alpha_{C_{66}}^{(1)}$

(7)

nous obtenons alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\rho_0}{C_{66}^0} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = (T_1 - T_0) \mu V \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \alpha_{C_{66}}^{(1)} (T_1 - T_0)$$

(8)

avec, d'après l'expression (6)

$$\frac{\partial V}{\partial y} (y, t) = \frac{4}{e_0} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin(2p+1) \frac{\pi y}{e_0}$$

(9)

2) Résolution sans 2ème membre :

$$\frac{\rho_0}{C_{66}^0} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Si nous posons $\frac{C_{66}^0}{\rho_0} = C^2$ il vient

$$\frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

La solution d'une telle équation s'écrit :

$$U(y,t) = U(y) \cos \omega t$$

Nous obtenons alors une équation classique

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{C^2} U = 0 \quad \text{avec} \quad U(y) = a \sin \frac{\omega}{C} y + b \cos \frac{\omega}{C} y$$

L'amplitude doit être nulle pour $y = 0$

$$U(y) = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0$$

$$\text{d'où} \quad U(y) = a \sin \frac{\omega}{C} y$$

La solution de l'équation aux dérivées partielles sans second membre s'écrit donc :

$$U_0 = a \sin \frac{\omega}{C} y \cos \omega t$$

3) Résolution avec second membre

a) Nous considérons tout d'abord l'équation ne comportant que le premier terme du second membre :

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (T_1 - T_0) \mu V \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

qui s'écrit compte tenu de (6) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= (T_1 - T_0) \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ &- \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cdot (T_1 - T_0) \mu \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-((2p+1)^2 \frac{t}{\Delta})} \cos(2p+1) \frac{\pi y}{e_0} \end{aligned}$$

Nous pouvons à nouveau considérer deux équations dont on cherche les solutions particulières.

* Calcul de la solution particulière $U_1^{(1)}$ de l'équation :

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = (T_1 - T_0) \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Nous utiliserons la méthode des approximations successives, μ étant faible nous remplaçons U au second membre par U_0 calculé précédemment :

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\mu (T_1 - T_0) \frac{a\omega^2}{C^2} \sin \frac{\omega}{C} y \cos \omega t$$

Nous prenons U_1 sous la forme $U_1 = \alpha \cdot y \cdot \cos \frac{\omega}{C} y \cdot \cos \omega t$

$$\text{avec } \alpha = \frac{-\mu (T_1 - T_0) a\omega}{2C}$$

Donc :

$$U_1^{(1)} = \frac{-\mu (T_1 - T_0) a\omega}{2C} \cdot y \cdot \cos \frac{\omega}{C} y \cdot \cos \omega t$$

* Calcul des solutions particulières $U_1^{(2)}$ et $U_1^{(3)}$ de l'équation:

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -(T_1 - T_0) \mu \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-\frac{(2p+1)^2}{\Delta} t} \cos(2p+1) \frac{\pi y}{e_0} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Nous utilisons à nouveau U_0 comme solution au second membre, soit :

$$= \frac{4}{\pi} (T_1 - T_0) \mu \frac{a\omega^2}{C^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cdot e^{-\frac{(2p+1)^2 \pi^2 a^2 t}{e_0^2}} \cdot \cos(2p+1) \frac{\pi y}{e_0} \cdot \sin \frac{\omega}{C} y \cos \omega t$$

$$= \frac{2}{\pi} (T_1 - T_0) \mu \frac{a\omega^2}{C^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-\frac{(2p+1)^2 \pi^2 a^2}{e_0^2} t}$$

$$(\sin \lambda_p y + \sin \lambda'_p y) \cos \omega t$$

avec :

$$\lambda_p = \frac{\omega}{C} + \frac{(2p+1)}{e_0} \pi ; \quad \lambda'_p = \frac{\omega}{C} - \frac{(2p+1)}{e_0} \pi \quad (10)$$

Nous avons deux solutions. En posant :

$$D = \frac{2}{\pi} (T_1 - T_0) \mu \frac{a\omega^2}{C^2} \quad (11)$$

l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = D \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t \\ + D \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda'_p y \cos \omega t \end{aligned} \quad (12)$$

- Calcul de $U_1^{(2)}$

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = D \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t$$

Nous prenons une solution de la forme :

$$U_1^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t$$

Nous considérerons que le terme en $e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}}$ varie très lentement dans le temps, comparativement au terme de pulsation ω , ce qui revient à écrire : $\frac{d}{dt}(e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}}) = 0$

Nous avons donc :

$$\frac{\partial^2 U_1^{(2)}}{\partial t^2} = -\omega^2 \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-\frac{(2p+1)^2 t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t$$

et

$$\frac{\partial^2 U_1^{(2)}}{\partial y^2} = - \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \lambda_p^2 \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-\frac{(2p+1)^2 t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t$$

En remplaçant dans l'équation différentielle et en posant :

$$\frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-\frac{(2p+1)^2 t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t = X_p$$

il vient :

$$\sum_{p=0}^{\infty} X_p \left[\alpha_p \lambda_p^2 - \alpha_p \frac{\omega^2}{C^2} \right] = D \sum_{p=0}^{\infty} X_p$$

soit :

$$\alpha_p = \frac{D}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}}$$

D'où :

$$U_1^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{D}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-\frac{(2p+1)^2 t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t$$

- Calcul de $U_1^{(3)}$

$$\frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = D \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-\frac{(2p+1)^2 t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t$$

Nous obtenons immédiatement :

$$U_1^{(3)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{D}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p' y \cos \omega t$$

b) En ne considérant maintenant que le second terme du deuxième membre de (8), on a l'équation :

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \alpha_{C66}^{(1)} (T_1 - T_0) \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

qui, compte tenu de (9) s'écrit :

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \alpha_{C66}^{(1)} (T_1 - T_0) \frac{4}{e_0} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin(2p+1) \frac{\pi y}{e_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}$$

et en utilisant : $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{a\omega}{C} \cos \frac{\omega}{C} y \cos \omega t$, nous obtenons :

$$= \alpha_{C66}^{(1)} (T_1 - T_0) \frac{4a\omega}{e_0 C} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} (\sin \lambda_p y - \sin \lambda_p' y) \quad (13)$$

$$\text{Nous posons : } D_1 = \frac{2}{Ce_0} (T_1 - T_0) a\omega \alpha_{C66}^{(1)} \quad (14)$$

On obtient une équation de forme analogue à (12)

Par analogie avec $U_1^{(2)}$, nous avons :

$$U_2^{(1)} = D_1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t$$

* De même pour l'équation :

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -D_1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p' y \cos \omega t$$

On obtient :

$$U_2^{(2)} = -D_1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p' y \cos \omega t$$

4) Solution générale

La solution générale est la somme de la solution sans second membre et de toutes les solutions particulières :

$$U_T = U_0 + U_1^{(1)} + U_1^{(2)} + U_1^{(3)} + U_2^{(1)} + U_2^{(2)}$$

$$= a \sin \frac{\omega}{C} y \cos \omega t$$

$$- \mu \frac{(T_1 - T_0) a \omega}{2C} \cdot y \cdot \cos \frac{\omega}{C} y \cdot \cos \omega t$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{D}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot \frac{(-1)^p}{2p+1} \cdot e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{D}{\lambda_p'^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot \frac{(-1)^p}{2p+1} \cdot e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p' y \cos \omega t$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{D_1}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot (-1)^p \cdot e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p y \cos \omega t$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{D_1}{\lambda_p'^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot (-1)^p \cdot e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \lambda_p' y \cos \omega t$$

soit :

$$U_T = a \sin \frac{\omega}{C} y \cos \omega t - \mu \frac{(T_1 - T_0)}{2C} \cdot a \omega \cdot y \cdot \cos \frac{\omega}{C} y \cos \omega t$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \cdot \sin \lambda_p y \cos \omega t \cdot (D_1 + \frac{D}{2p+1})$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\lambda_p'^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \cdot \sin \lambda_p' y \cdot \cos \omega t \cdot \left(\frac{D}{2p+1} - D_1 \right)$$

5) Calcul de $\omega(t)$

Nous appliquons les conditions aux limites.

Les extrémités étant libres, les efforts sont nuls, ce qui revient à écrire pour $y = \pm \frac{e_0}{2}$: $T_6 = 0$ et par conséquent $S_6 = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ soit :

$$y = \pm \frac{e_0}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda_p y = -(-1)^p \sin \frac{\omega e_0}{2C} \\ \cos \lambda_p' y = (-1)^p \sin \frac{\omega e_0}{2C} \end{array} \right.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_T}{\partial y} \right)_{y=\frac{e_0}{2}} &= \frac{a\omega}{C} \cos \frac{\omega e_0}{2C} \cos \omega t - \mu \frac{(T_1 - T_0)}{2C} a\omega \cos \omega t \cdot \\ &\quad \left\{ \cos \frac{\omega e_0}{2C} - \frac{\omega e_0}{2C} \sin \frac{\omega e_0}{2C} \right. \\ &\quad - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}}}{\lambda_p'^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot \lambda_p \cdot \sin \frac{\omega e_0}{2C} \cos \omega t \left(D_1 + \frac{D}{2p+1} \right) \\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}}}{\lambda_p'^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \cdot \lambda_p' \cdot \sin \frac{\omega e_0}{2C} \cos \omega t \left(\frac{D}{2p+1} - D_1 \right) \end{aligned}$$

La partie sommable devient alors :

$$\begin{aligned} \cos \omega t \sum_{p=0}^{\infty} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \sin \frac{\omega e_0}{2C} \frac{D}{2p+1} &\left(\frac{\lambda_p'}{\lambda_p'^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} - \frac{\lambda_p}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \right) \\ &- D_1 \left(\frac{\lambda_p'}{\lambda_p'^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} + \frac{\lambda_p}{\lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{C^2}} \right) \end{aligned}$$

Soit en remplaçant λ_p et λ'_p par leurs valeurs (10):

$$= \cos \omega t \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e_0}{(2p+1)\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{(2p+1)^2 t}{\Delta}} \sin \frac{\omega e_0}{2C}}{\frac{(2p+1)^2 \pi^2}{e_0^2} - \frac{4\omega^2}{C^2}}$$

$$= \frac{D}{2p+1} \cdot \left(\frac{2(2p+1)^2 \pi^2}{e_0^2} - \frac{4\omega^2}{C^2} \right) - D_1 \frac{2\omega(2p+1)\pi}{C e_0}$$

et en remplaçant D et D_1 par leurs valeurs (11) et (14) :

$$= - \frac{4(T_1 - T_0) a \omega^2}{\pi^2 e_0 C^4} \cdot \cos \omega t \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2p+1)^2 t}{\Delta}} \sin \frac{\omega e_0}{2C}}{(2p+1)^2 \cdot \left(\frac{(2p+1)^2 \pi^2}{e_0^2} - \frac{4\omega^2}{C^2} \right)}$$

$$\frac{(2p+1)^2 \pi C^2 (2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}) - 2 \omega^2 e_0^2 \mu}{(2p+1)^2 \left(\frac{(2p+1)^2 \pi^2}{e_0^2} - \frac{4\omega^2}{C^2} \right)}$$

L'expression générale s'écrit, en éliminant le terme commun $a \omega \cos \omega t$

$$0 = \frac{1}{C} \cos \frac{\omega e_0}{2C} - \frac{\mu(T_1 - T_0)}{2C} \left[\cos \frac{\omega e_0}{2C} - \frac{\omega e_0}{2C} \sin \frac{\omega e_0}{2C} \right]$$

$$= - \frac{4(T_1 - T_0) \omega}{\pi^2 e_0 C^4} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{(2p+1)^2 t}{\Delta}} \sin \frac{\omega e_0}{2C} \cdot$$

$$\frac{(2p+1)^2 \pi C^2 (2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}) - 2 \omega^2 e_0^2 \mu}{(2p+1)^2 \left(\frac{(2p+1)^2 \pi^2}{e_0^2} - \frac{4\omega^2}{C^2} \right)}$$

En groupant les termes en sinus et cosinus, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\omega e_0}{2C} = & - \frac{\frac{2 - \mu(T_1 - T_0)}{2C}}{\frac{(T_1 - T_0)\omega}{C^2} + \frac{\mu e_0}{4} - \frac{4}{\pi^2 e_0 C^2} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \cdot} \\ & \frac{(2p+1)^2 \pi C^2 (2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}) - 2\omega^2 e_0^2 \mu}{(2p+1)^2 \frac{(2p+1)^2 \pi^2}{e_0^2} - \frac{4\omega^2}{C^2}} \end{aligned} \quad (15)$$

Si $T_1 = T_0$ nous constatons que

$$\operatorname{tg} \frac{\omega e_0}{2C} \text{ tend vers l'infini soit } \omega = \omega_0 = \frac{\pi C}{e_0}$$

Dans la pratique ω est peu différent de ω_0 .

Nous pouvons ainsi remplacer les ω figurant au deuxième membre par

$$\frac{\pi C}{e_0} \text{ soit :}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega e_0}{2C} = - \frac{\frac{2 - \mu(T_1 - T_0)}{2}}{\frac{(T_1 - T_0)\pi}{C} + \frac{\mu}{4} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \cdot \frac{(2p+1)^2 (2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}) - 2\pi\mu}{(2p+1)^2 \cdot (2p+1)^2 - 4}}$$

En posant : $\omega = \omega_0 (1 + v(t))$ avec $v(t)$ très petit, nous pouvons écrire :

$$\operatorname{tg} \frac{\omega e_0}{2C} \approx \frac{-2}{\pi_0 v(t)}$$

On obtient alors l'expression de $v(t)$:

$$v(t) = \frac{4(T_1 - T_0)}{2 - \mu(T_1 - T_0)} \cdot \frac{\mu}{4} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-(2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \cdot \frac{(2p+1)^2 (2\alpha_y^{(1)} + \alpha_z^{(1)}) - 2\pi\mu}{(2p+1)^2 \cdot (2p+1)^2 - 4}$$

Dans notre cas : $\mu(T_1 - T_0) \ll 2$ et :

$$v(t) = 2(T_1 - T_0) \frac{\mu}{4} - \frac{4}{\pi^3} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \frac{(2p+1)^2 - 2\pi}{(2p+1)^2 (2p+1)^2 - 4}$$

Dans le cas d'une coupe AT (ou BT) nous négligeons $\alpha_{C66}^{(1)}$ devant μ .
Si $t = 0$ nous avons $v(t) \neq 0$ car :

$$\frac{4}{\pi^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p+1)^2 - 2\pi}{(2p+1)^2 (2p+1)^2 - 4} = \frac{1}{4}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} t = 0 & ; \omega = \omega_0 \\ \text{pour} & \\ t \rightarrow \infty & ; \omega_1 = \omega_0 + \frac{(f_1 - f_0)}{2} \mu \end{aligned}$$

Pour la fréquence du résonateur l'expression du régime transitoire théorique s'écrit :

$$f = f_0 \left[1 + 2\mu(T_1 - T_0) \frac{1}{4} - \frac{4}{\pi^3} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-2p+1)^2 \frac{t}{\Delta}} \frac{(2p+1)^2 - 2\pi}{(2p+1)^2 (2p+1)^2 - 4} \right]$$

Nous avons représenté graphiquement cette expression pour $(T_1 - T_0) = 5^\circ\text{C}$ et $\mu \approx 1,3 \cdot 10^{-5}$ sur la figure 59, avec en abscisse le temps réduit : $\frac{t}{\Delta}$.

Les durées de stabilisation pour les deux types de résonateur correspondent à celles de la figure 56.

Nous noterons toutefois que la valeur du coefficient μ varie en fonction de l'angle de coupe θ car il dépend de $\alpha_{C66}^{(1)}$ (7).

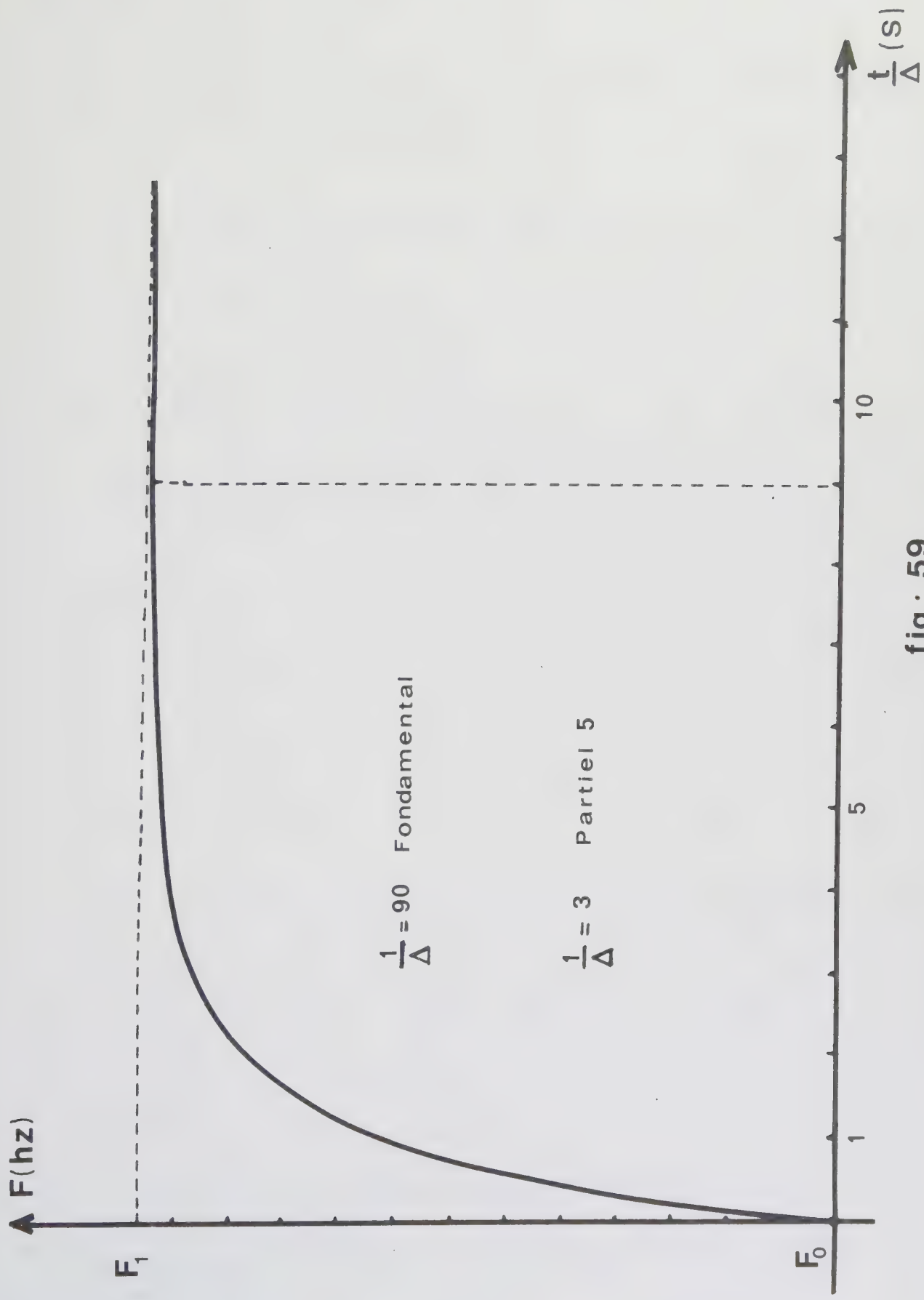


fig : 59

En effet, le coefficient $\alpha_{C_{66}}^{(1)}$ est lié à l'angle de rotation θ autour de OX (réf.d) par les relations :

$$C'_{66} = \sin^2\theta \cdot C_{44} + \cos^2\theta \cdot C_{66} + 2 \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot C_{14}$$

$$\alpha_{C'_{66}} = \frac{1}{C'_{66}} \cdot \frac{\partial C'_{66}}{\partial T}$$

Il en ressort l'expression :

$$\alpha_{C'_{66}}^{(1)}(\theta) = \frac{\sin^2\theta \cdot C_{44} \cdot \alpha_{C_{44}} + \cos^2\theta \cdot C_{66} \cdot \alpha_{C_{66}} + 2\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \alpha_{C_{14}}}{\sin^2\theta \cdot C_{44} + \cos^2\theta \cdot C_{66} + 2\cos\theta \cdot C_{14}}$$

avec (réf.g) :

$$\begin{aligned} C_{44} &= 5,820 \cdot 10^{11} \text{ dynes/cm}^2 & \alpha_{C_{44}} &= -177 \cdot 10^{-6} \\ C_{66} &= 3,988 \cdot 10^{11} \text{ " " } & \text{et } \alpha_{C_{66}} &= 178 \cdot 10^{-6} \\ C_{14} &= -1,804 \cdot 10^{11} \text{ " " } & \alpha_{C_{14}} &= 101 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

La variation de $\alpha_{C'_{66}}^{(1)}$ en fonction de θ est représentée sur la figure 60.

Le coefficient s'annule pour les valeurs d'angles correspondant aux coupes AT et BT.

6) Remarques

En raison de la complexité que prend l'équation différentielle (8) lorsque l'on introduit les coefficients de température d'ordre supérieur, nous n'avons fait intervenir que les coefficients du premier ordre.

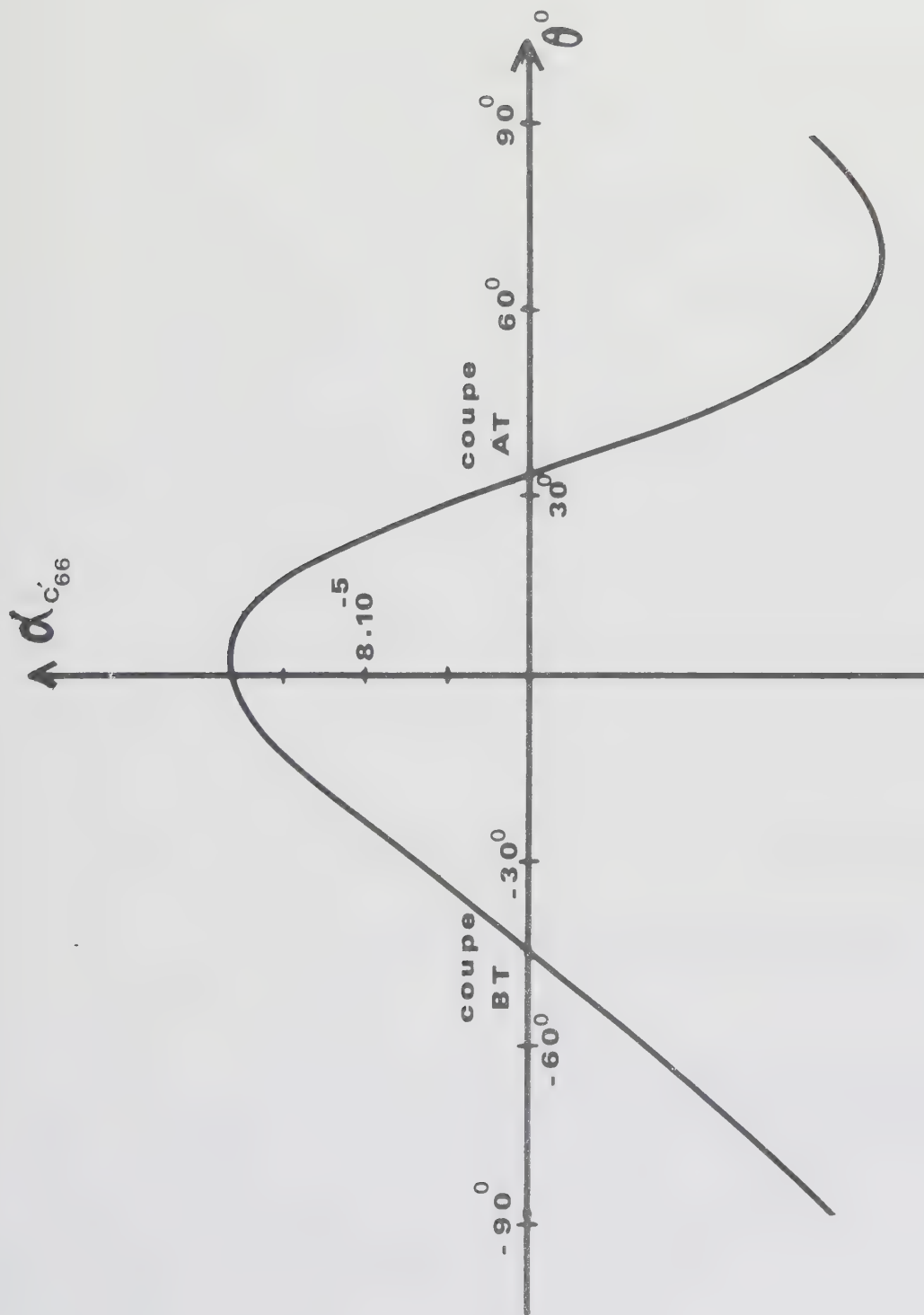


FIG : 60

Nous nous sommes, d'autre part, placé dans le cas d'une plaque Y non métallisée dont l'épaisseur est faible vis à vis de ses autres dimensions.

Ce calcul linéaire ne s'applique pas au cas d'une coupe AT (ou BT) pour laquelle le coefficient du premier ordre s'annule.

Toutefois, en nous plaçant expérimentalement dans une partie croissante de la caractéristique, (c'est-à-dire à une température supérieure à celle d'inversion) (fig.1) l'allure de la variation théorique demeure valable.

Ce calcul n'explique cependant pas l'existence d'une chute préalable de fréquence mais reproduit à une homotétie temporelle près l'allure du régime transitoire expérimental pour $t > \tau$.

Il est vrai que nous n'avons pas introduit les temps de conduction des fixations et des électrodes, de mise en température de l'enceinte, et que nous avons supposé les faces du résonateur passant instantanément de T_0 à T_1 (court-circuit thermique).

C - RESONATEUR MUNI D'ELECTRODES ET MONTE SUR DES PATTES DE FIXATION

Les électrodes rectilignes de faible surface nous ont permis d'obtenir une chute de fréquence de très faible valeur (fig.47).

Nous pouvons donc penser qu'un quartz non métallisé (résonant en "lames d'air") et fixé de manière extrêmement souple, puisse avoir un régime transitoire proche de celui calculé théoriquement.

Ce montage n'est toutefois pas réalisable facilement en raison de la stabilité nécessaire aux mesures.

1) Influence des électrodes

Pour un résonateur sous ampoule et à faible pression, la propagation de la chaleur intervient principalement par les fixations et les électrodes.

Dans ces conditions, l'influence des électrodes sur la fréquence du résonateur peut intervenir de deux manières :

a) Dilatation des électrodes

Si nous considérons comme utile la partie du résonateur recouverte par les électrodes, nous avons là, juxtaposition d'éléments à coefficients de dilatation différents.

Les électrodes étant constituées d'une couche métallique mince, leur dilatation pourra s'observer dans le même temps que celle des pattes de fixation. Les efforts dus à cette dilatation sont des efforts répartis sur toute la surface des électrodes. Ils dépendent du coefficient de dilatation du métal employé, de l'épaisseur de la couche et de l'échelon de température. Dans le cas particulier des électrodes rectilignes de faible largeur, les efforts seront répartis suivant OZ, et peuvent entraîner l'application d'une force suivant cet axe.

b) Existence de contraintes internes

Comme l'indique la répartition de température dans la plaque (fig.56), les faces externes du cristal, directement en contact avec la couche métallique, sont nécessairement à une température plus élevée que le centre.

Si nous considérons deux plans voisins à l'intérieur du cristal, leurs températures respectives seront différentes. De par les dilatations variables de ces couches voisines, nous pouvons considérer qu'elles entraînent l'apparition d'un réseau de contraintes internes. Ce deuxième effet est d'autant plus important que le cristal est plus épais (partiel 5 par exemple).

2) Influence des fixations

Le disque de quartz est soudé suivant Z a deux "pattes" de fixation.
La figure 61 représente le montage utilisé pour de nombreux résonateurs
(principalement fondamentaux)(fig.61).

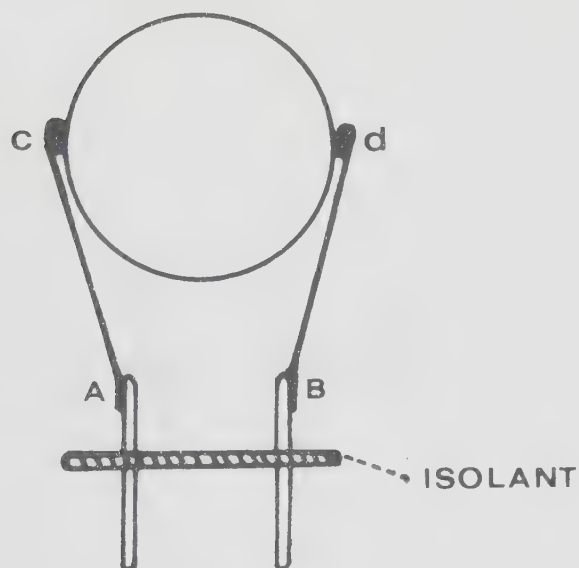


FIG:61

Lors d'un choc de température, la chaleur se propage plus rapidement dans les matériaux les plus conducteurs; par conséquent les pattes de fixation s'échauffent avant le cristal lui-même. Nous allons scinder le problème en deux parties :

a) Pattes de fixation considérées seules (fig.62)

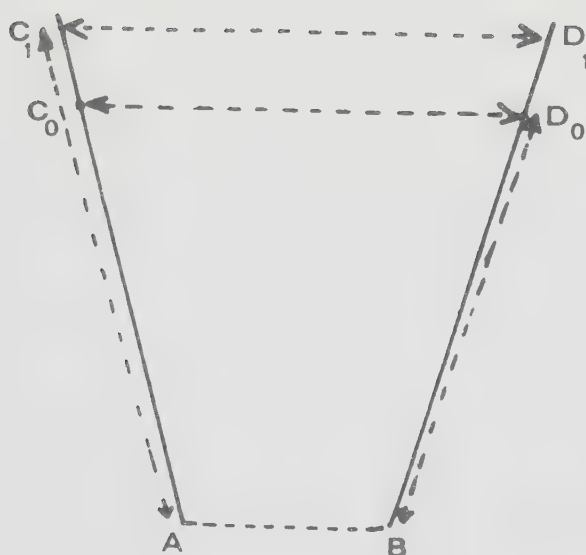


FIG:62

Soit l_0 leur longueur initiale (température T_0)

l " " finale (température T_1)

Soit d_0 la distance initiale $C_0 D_0$

$d_0 + \Delta d$ " finale $C_1 D_1$

Δd représente l'écartement des points de fixation avec la température.

Nous pouvons écrire, si α représente le coefficient de dilatation du métal et ΔT l'échelon de température ($T_1 - T_0$) le système suivant :

$$\frac{l_0}{l} = \frac{d_0}{d_0 + \Delta d}$$

$$l = l_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

Nous en déduisons immédiatement $\Delta d = \alpha d_0 \Delta T$

b) Cristal fixé

Tant que la chaleur n'a pas diffusé, le cristal, considéré encore à la température T_0 , conserve son diamètre d_0 . Il supporte donc dans un premier temps, de la part des fixations sur lesquels il est soudé, un effort proportionnel à l'écartement fictif Δd .

Nous pouvons l'écrire sous la forme d'une force :

$$F_f = K \cdot \Delta d = K \cdot \alpha \cdot d_0 \cdot \Delta T$$

Cette force est dirigée suivant OZ vers l'extérieur du disque comme nous le voyons sur la figure 63.

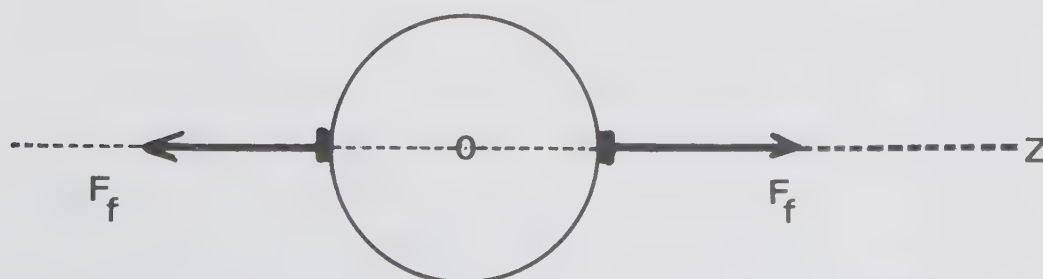


FIG : 63

La valeur du coefficient K dépend du temps en raison de la vitesse de chauffage. La dilatation du cristal qui intervient par la suite et la souplesse des fixations, limitent la valeur de cette force.

3) Influence sur la fréquence du résonateur

L'application d'un échelon de température au résonateur tout entier semble donc avoir quatre effets différents et consécutifs dans le temps :

- a) la propagation de la chaleur dans les fixations entraîne l'apparition très rapide d'une force de traction F_f dirigée suivant OZ.
- b) la création de contraintes à la jonction Métal-Quartz comprise entre l'électrode et le quartz (coefficients de dilatation différents). Pour ces deux effets, il y a proportionnalité avec la vitesse de chauffage et l'écart de température. Ils sont toutefois limités par la souplesse des pattes de fixation et l'épaisseur de la couche métallique.
- c) l'apparition de contraintes internes au cristal dues au gradient de température entre les couches superficielles et internes du cristal. Cet effet est surtout important pour les résonateurs de plus grande épaisseur.
- d) l'élévation de température du cristal tout entier qui, comme nous l'avons calculé, tend à augmenter la fréquence du résonateur.

Le régime transitoire du résonateur est lié à ces quatre effets. Nous connaissons déjà l'influence du dernier (fig.59). Pour les effets (b) et (c) le calcul s'avère difficile car il s'agit de contraintes réparties, et nécessite sans doute l'élaboration d'une théorie délicate. Par contre, il est possible de calculer l'influence (a) d'une force de traction F_f dirigée suivant OZ sur le disque de quartz.

- Influence des forces sur le disque de quartz

D'après les récents travaux réalisés au laboratoire par J.P. PERDIGUES (réf.g) nous savons établir pour un disque vibrant en cisaillement d'épaisseur, la relation fréquence - force appliquée.

Si le disque est d'angle de coupe θ , une force appliquée suivant l'azimut ψ provoque une variation de fréquence Δf (figure 64). Δf s'exprime en fonction de l'effort par l'expression :

$$\Delta f = \frac{f_o^2 K_f (\psi, \theta) . F}{n D}$$

avec F : force appliquée

D : diamètre du disque de quartz

n : rang de l'harmonique

f_o : fréquence de résonance (sans contrainte)

$K_f(\psi, \theta)$: coefficient de sensibilité

Sa valeur se détermine par l'expression suivante :

$$K_f(\psi, \theta) = \frac{n}{\pi e C'_{66} f_o} \cdot \left[(1 + \cos 2\psi) \left[S'_{11} (C'_{661} + 2C'_{66}) + S'_{12} C'_{662} + S'_{13} C'_{663} + S'_{14} C'_{664} \right] + (1 - \cos 2\psi) \left[S'_{13} (C'_{661} + 2C'_{66}) + S'_{23} C'_{662} + S'_{33} C'_{663} \right] \right]$$

où S'_{ij} et C'_{ijk} (réf.g) expriment respectivement les déformations et les coefficients d'élasticité.

Les variations de $K_f(\psi, \theta)$ sont représentées sur la figure 65. Dans notre cas, où $\psi = 90^\circ$ et $\theta = 35^\circ$ (coupe AT), $K_f \approx 1,5 \cdot 10^{-14}$ MKS pour un résonateur 5 MHz, d'épaisseur 0,33 mm et vibrant sur son fondamental.

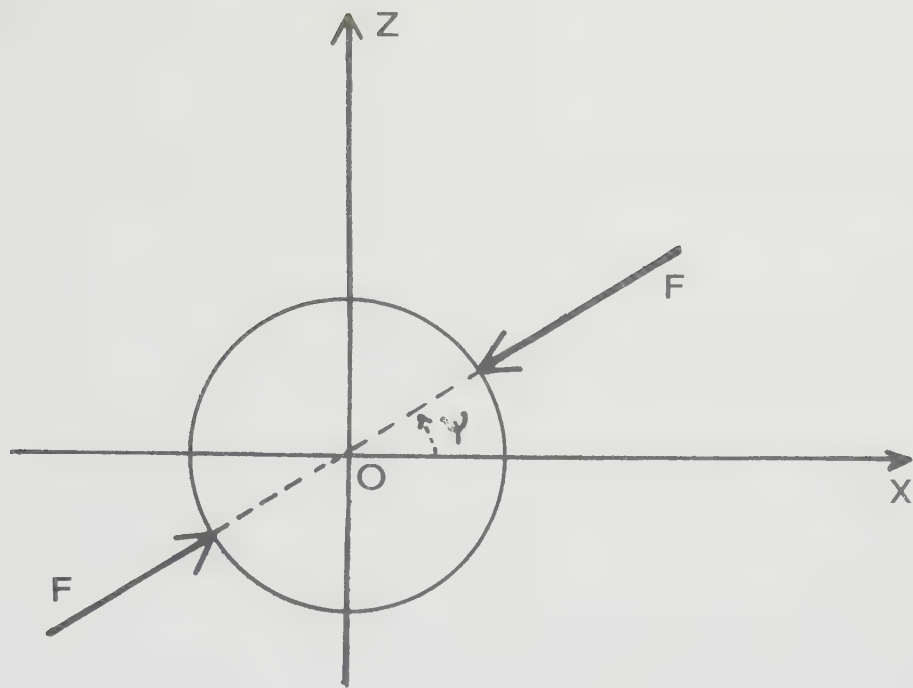


FIG : 64

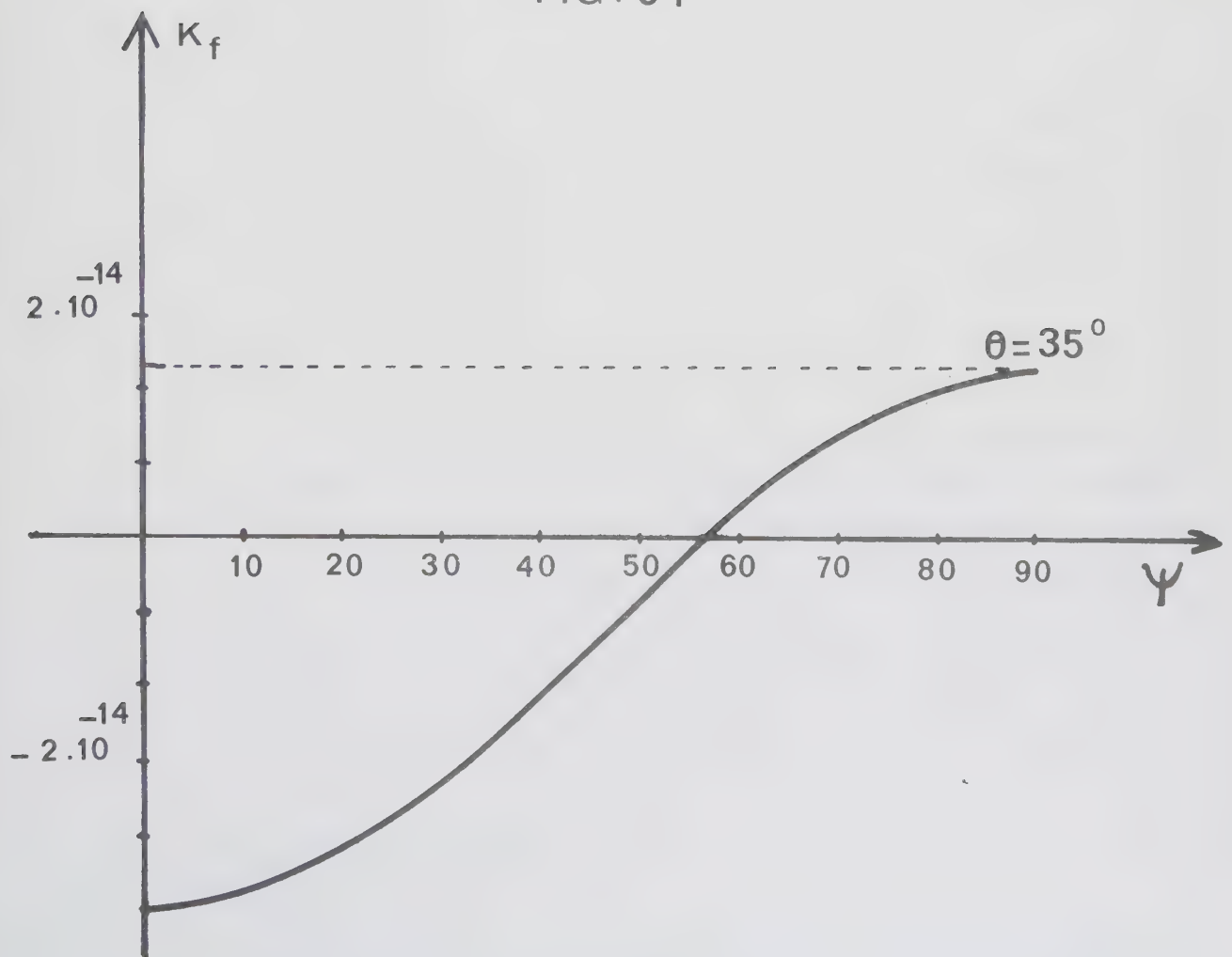


FIG : 65

Nous pouvons alors écrire la variation de fréquence correspondante :

$$\Delta f \approx 25 F$$

Dans le cas d'une compression ($\Delta F > 0$) nous aurons un accroissement de fréquence.

Dans le cas d'une traction ($\Delta F < 0$) nous aurons une diminution de fréquence.

Δf s'exprime ici en Hz et F en Kgf.

Dans notre étude expérimentale, l'amplitude de la variation négative de fréquence Δf_{∞} , était pour le résonateur fondamental à électrodes rectilignes de l'ordre de 10^{-2} Hz.

Il est facile de déterminer la force de traction nécessaire à une telle variation.

Nous trouvons : $F = 0,4$ gf.

Un effort de même intensité appliqué suivant Z peut donc entraîner une variation relative de fréquence de $2 \cdot 10^{-9}$. Ce résultat est tout à fait plausible.

Il convient de remarquer que cette contrainte existe dès que les fixations et les électrodes changent de température.

Elle est nulle pour la température ambiante (température de fixation du cristal et métallisation des électrodes).

Elle prend une valeur constante pour toute autre température. On peut donc penser que lorsque la température augmente, l'augmentation de contrainte est cumulative. Nous sommes cependant limités par la souplesse des fixations, et par la minceur de la couche métallique constituant l'électrode. Ces deux éléments permettent des chocs de température importants (25°C) sans dégradation du résonateur. On reste dans les limites élastiques des fixations et du cristal. Ceci explique la reproductibilité des expériences.

- Allure de l'enregistrement

En tenant compte des quatre effets cités précédemment, nous pouvons dans une certaine mesure prévoir le mécanisme du régime transitoire (§.3).

Les effets (a), (b), (c) dus aux contraintes externes et internes interviennent le plus rapidement et provoquent la variation négative de fréquence.

L'effet (d) dû à la diffusion de la chaleur dans le disque de quartz, implique l'augmentation de fréquence prévisible par le calcul(fig.59).

Le régime transitoire que nous observons expérimentalement est donc en fait la somme des deux phénomènes contradictoires échelonnés dans le temps et disproportionnés en amplitude.

C'est ce que nous avons représenté schématiquement sur la figure 66.

4) Remarques

L'approche théorique que nous venons d'exposer demande à être complétée puisque nous n'avons pas déterminé quantitativement l'influence des contraintes internes et des électrodes.

Toutefois l'hypothèse de la superposition des deux phénomènes a, au cours des manipulations, pu être vérifiée :

- * Dans le cas d'un choc de température, réalisé de T_0 à T_1 dans une partie décroissante de la caractéristique, c'est-à-dire avant la température d'inversion $T_{\min}$ (voir fig.68).
L'allure de la variation de fréquence est représentée sur la figure 67.

Nous remarquons que seule la 2ème partie de l'enregistrement a changé de sens ; ce qui est tout à fait en accord avec notre hypothèse. De plus l'ordre de grandeur de Δf est respecté.

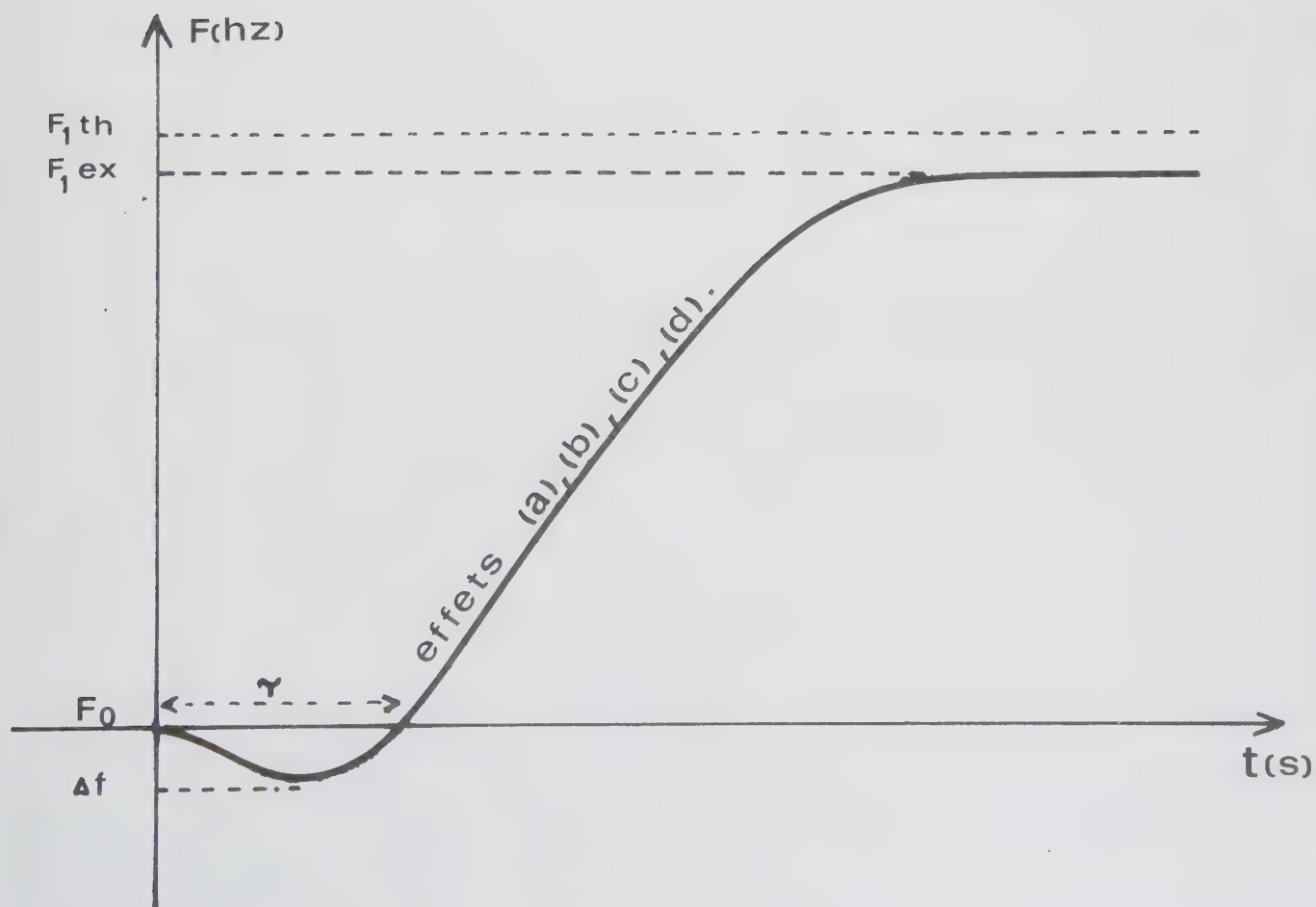
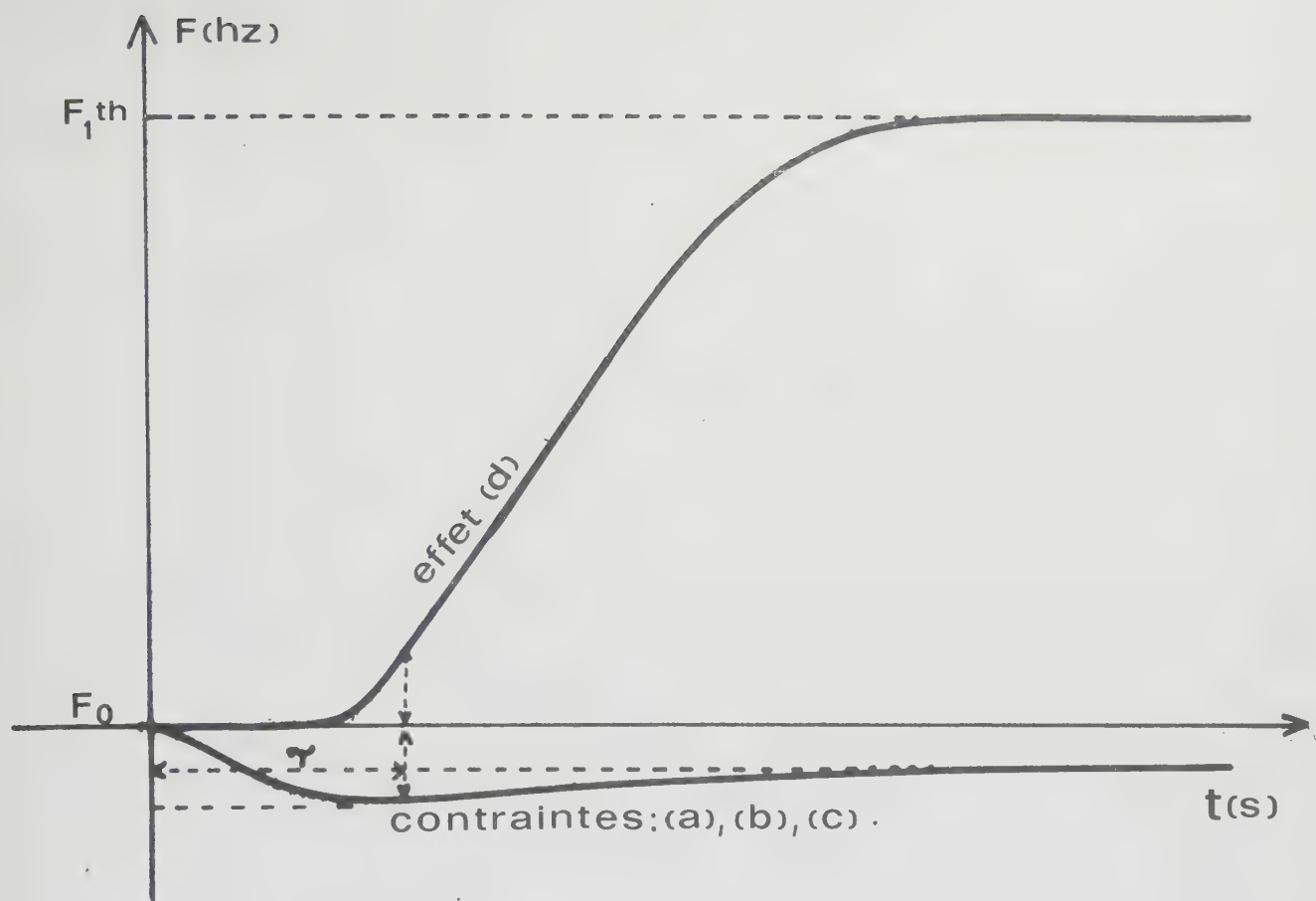
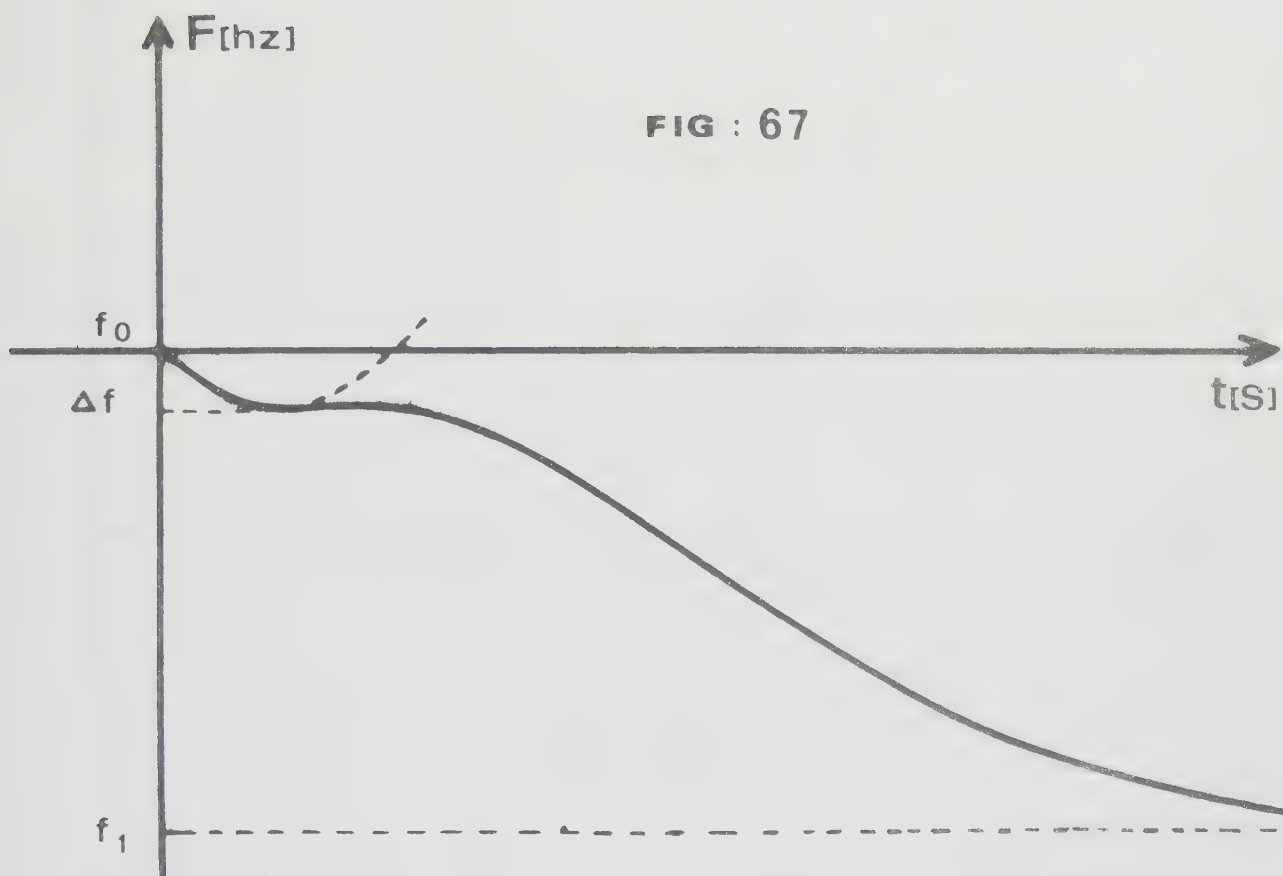


FIG : 66



* Dans le cas de chocs de température (d'amplitude infinie) successifs réalisés sur une partie croissante de la caractéristique avec une vitesse de chauffage constante, la température initiale ($T_{0A}, \dots, T_{0D}$) étant augmentée à chaque enregistrement d'une même quantité (fig.68 et 69).

Nous notons que la pente de la variation négative de fréquence reste constante au début ($V_c = \text{cte}$).

Par contre l'augmentation du coefficient de température (conséquence de l'éloignement de plus en plus grand des points A,B,C,D, par rapport au minimum d'inversion) provoque l'accroissement de pente de l'effet (d) (fig.66). τ et Δf_∞ diminuent simultanément

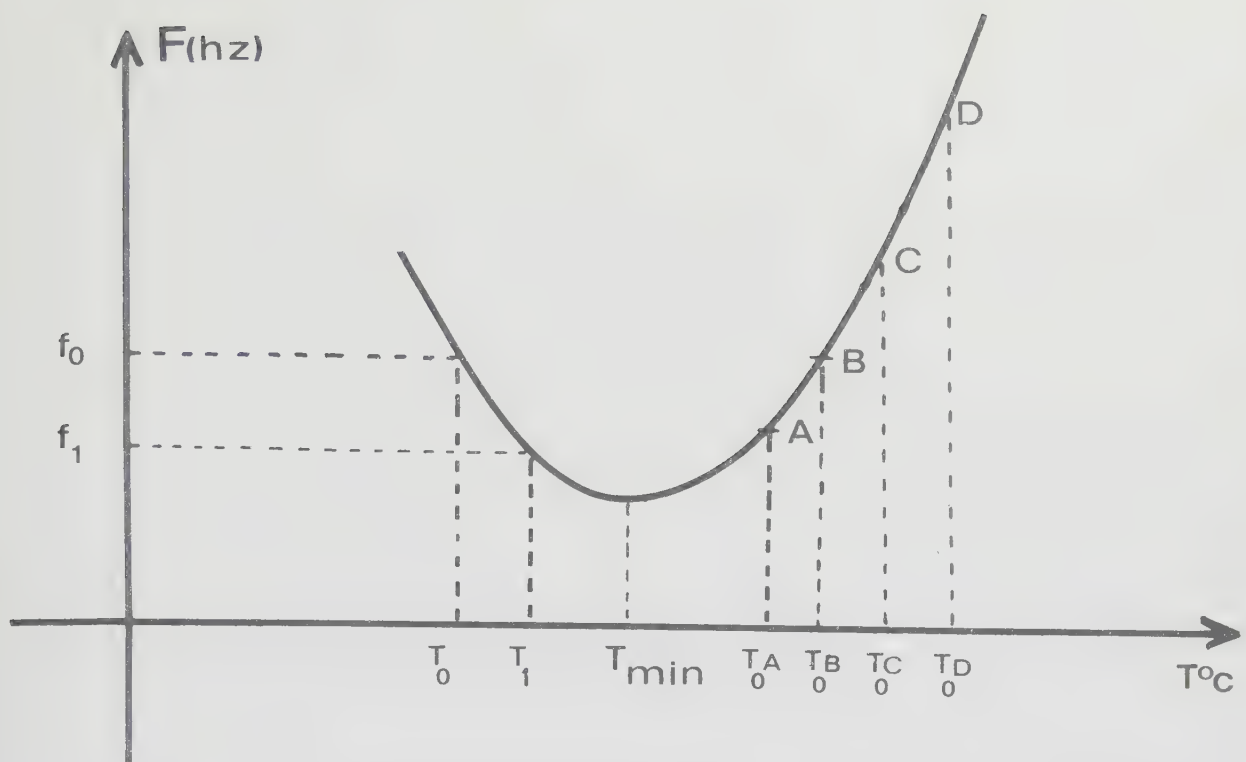


FIG : 68

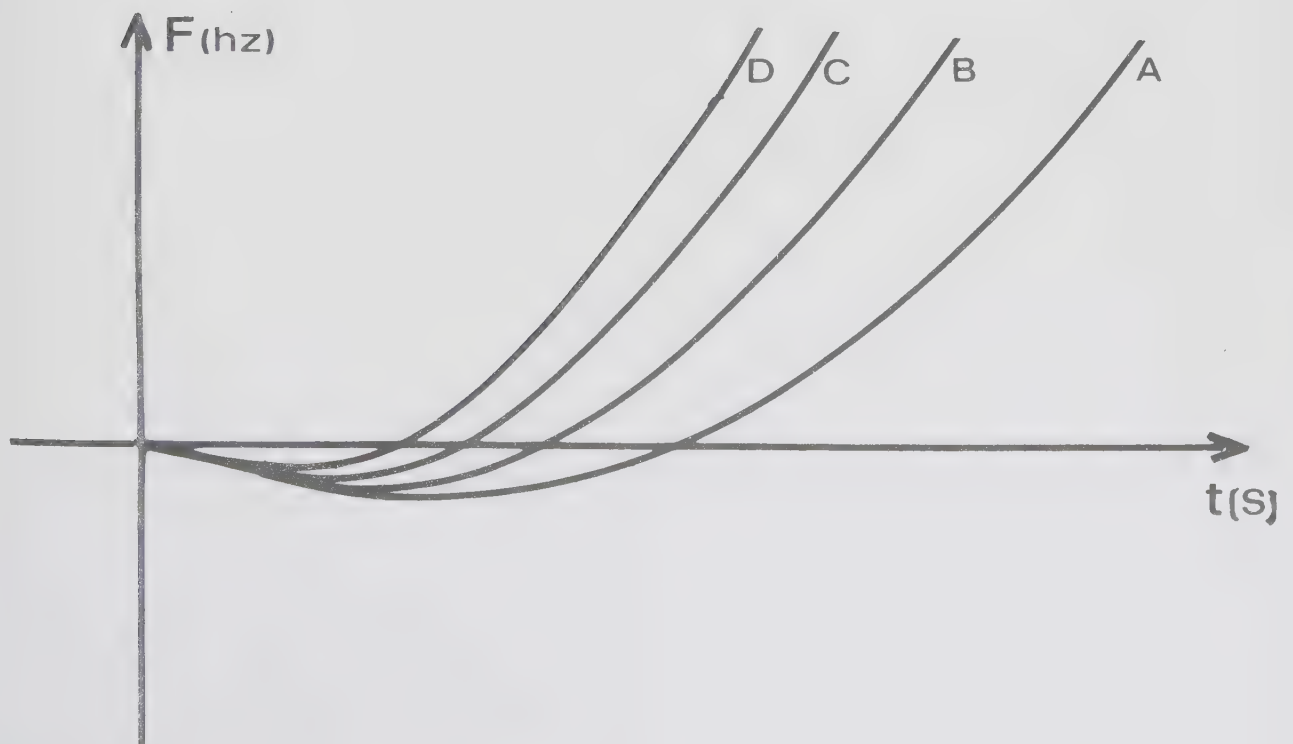


FIG : 69

De même l'influence du milieu gazeux s'explique facilement. Plus la pression est importante, plus le milieu est conducteur, et par conséquent, l'influence des contraintes augmente. De même la diffusion de la température est plus rapide.

Schématiquement, nous avons une translation de l'effet (d) vers l'origine alors que la pente de la variation négative de fréquence due aux effets (a), (b), (c) croît en valeur absolue ainsi que la valeur de Δf_{∞} .

Le temps de réponse τ diminue comme d'ailleurs le temps de stabilisation total. C'est évidemment l'inverse si le milieu est moins conducteur (gaz à faible pression).

Ce comportement du résonateur se retrouve bien entendu mais de façon plus accentuée vis à vis de la vitesse de chauffage.

Pour les résonateurs de plus grande épaisseur le gradient de température se maintient pendant un temps beaucoup plus long (fig.56). Nous aurons donc une augmentation sensible de l'effet (c) dû aux contraintes internes et par conséquent de Δf , τ et du temps de stabilisation (T_s). C'est bien ce que nous observons expérimentalement.

IV - C O N C L U S I O N G E N E R A L E

Dans l'étude expérimentale que nous venons de réaliser nous avons mis en évidence, pour une température donnée et :

- pour des échelons de température de faible valeur

. la proportionnalité entre l'amplitude Δf de la variation de fréquence maximale et l'écart de température ΔT : $\Delta f = K \Delta T$

. la dépendance du coefficient K vis à vis de la vitesse de chauffage $K = K(V_c)$.

- pour des échelons plus importants

. l'existence d'un point limite, fonction des caractéristiques du résonateur et indépendant de la vitesse de chauffage et de l'amplitude de l'échelon.

De même l'expérience a démontré que la durée et l'amplitude du régime transitoire dépendaient dans une large mesure de l'épaisseur du cristal et du type d'électrodes utilisées.

Pour l'environnement gazeux nous avons également pu établir un certain parallélisme : pression-vitesse de chauffage, le gaz intervenant alors comme un milieu à conductivité variable.

Il nous a alors été possible de définir une nouvelle forme d'électrodes et par la suite de réaliser un résonateur à temps de réponse faible.

Le comportement de ce résonateur en régime d'impulsions thermiques a confirmé les manipulations précédentes et a permis d'envisager la réalisation de sondes de température utilisables pour des mesures dynamiques.

Notre approche théorique apporte une explication physique simple du mécanisme du régime transitoire. Elle permet en outre de se ramener à un problème de contraintes dont on connaît déjà certaines solutions. Un calcul difficile doit cependant être entrepris pour déterminer leur ordre de grandeur et leur effet exact sur la fréquence propre du résonateur.

Nous espérons que ce travail contribuera à une meilleure connaissance du comportement dynamique des résonateurs, et qu'il permettra de progresser dans le récent domaine des capteurs piézoélectriques.

B I B L I O G R A P H I E

- a) John P. BUCHANAN
Handbook of piezoelectric crystal for radio equipment designers
Phil Corporation - Décembre 1954.
- b) *Proceedings of the 24th Annual Symposium on frequency control* -
April 1970 - U.S. Army Electronics Command Fort Monmouth -
New Jersey.
- c) HEISING
Quartz crystal for electrical circuits
New York - D. Van Nostrand Company, Inc.
- d) W.G. CADY
Piezoelectricity
Tomes 1 et 2.
- e) J.J. GAGNEPAIN
Mécanismes non linéaires dans les résonateurs à quartz
(Doctorat d'Etat - Mars 1972).
- f) F.G. TINTA - A.S. MATISTIC - and G.A. LAGASSE
The direct temperature Control of Quartz crystals in evacuated enclosures.
Frequency Electronics Inc. New Hyde Parck, New York 11 040

g) J.P. PERDIGUES

Etude de l'influence des forces sur la fréquence d'un résonateur à quartz - Applications métrologiques

Thèse de Docteur Ingénieur - Avril 1975.

h) Mohamed MABROUCK

Etude et réalisation de sondes de températures à quartz

Thèse de Docteur-Ingénieur - Juin 1975.

i) Vladimir IANOUCHEVSKY

*Demande de Brevets d'Inventions : quartz piézoélectrique (Juil.59)
Cristal piézoélectrique (Juil.61), Perfectionnements aux résonateurs piézoélectriques (Fev.64).*

j) Charles FABRY

Propagation de la chaleur

(Armand Colin)

k) CHAUVIN J.

Etude de la réponse en fréquence d'un résonateur à quartz soumis à un choc de température

l) W.P.MASON

Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics

(D. Van Nostrand Company - New York).

m) E. DIEULESAINT, D. ROYER

Ondes élastiques dans les solides.

Application au traitement du signal

Masson et Cie, Editeurs. 1974.

